

Plaquette 2 – Rotations : centre, angle et sens

Translations et rotations — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. La rotation de centre O , d'angle α et de sens donné transforme un point M en M' tel que :

$$OM' = OM \quad \text{et} \quad \widehat{MOM'} = \alpha$$

Le centre O est le seul point qui ne bouge pas : il est sa propre image.

Les deux sens.

Sens	Autre nom	Sur une horloge
sens des aiguilles d'une montre	sens indirect	de 12 vers 3
sens inverse des aiguilles d'une montre	sens direct	de 3 vers 12

Compter les carreaux pour un quart de tour. On repère le déplacement de O vers M (« a à droite, b en haut »), puis on le fait pivoter :

Quart de tour	« à droite » devient	« en haut » devient
sens inverse des aiguilles	« en haut »	« à gauche »
sens des aiguilles	« en bas »	« à droite »

Le demi-tour. Une rotation d'angle 180° ne dépend pas du sens : c'est la **symétrie centrale** de centre O . Le centre O est alors le **milieu** de $[MM']$, ce qui donne, dans un repère :

$$x_O = \frac{x_M + x_{M'}}{2} \quad y_O = \frac{y_M + y_{M'}}{2}$$

Cas particuliers. Une rotation d'angle 0° (ou 360°) ne change rien. Deux demi-tours de même centre ramènent au point de départ.

Enchaîner deux rotations de même centre : les angles s'ajoutent (si les sens sont les mêmes).

Ce qui se conserve : longueurs, angles, aires, alignement, parallélisme.

Correction de l'exercice 1 – Quart de tour autour de l'origine

On repère le déplacement qui mène du centre O au point M :

— de $O(0; 0)$ à $M(4; 1)$: **4 à droite, puis 1 en haut.**

On fait pivoter ce déplacement d'un quart de tour dans le sens inverse des aiguilles :

— « 4 à droite » devient « **4 en haut** » ;

— « 1 en haut » devient « **1 à gauche** ».

On part donc de O et on applique le nouveau déplacement : 1 à gauche et 4 en haut.

— $x_{M'} = 0 - 1 = -1$;

— $y_{M'} = 0 + 4 = 4$.

L'image est $M'(-1; 4)$.

Contrôle. OM et OM' doivent avoir la même longueur : de O à M , on fait 4 et 1 ; de O à M' , on fait 1 et 4. Les deux écartements sont les mêmes ✓

Réponse. $M'(-1; 4)$.

Correction de l'exercice 2 - L'autre sens

On repart du même déplacement : de O à M , 4 **à droite**, 1 **en haut**.

Dans le sens des aiguilles d'une montre, le quart de tour transforme les directions ainsi :

- « 4 à droite » devient « 4 **en bas** » ;
- « 1 en haut » devient « 1 **à droite** ».
- $x_{M''} = 0 + 1 = 1$;
- $y_{M''} = 0 - 4 = -4$.

L'image est $M''(1; -4)$.

Comparaison avec l'exercice précédent. Le même point, le même centre, le même angle, mais deux images différentes : $(-1; 4)$ et $(1; -4)$. C'est pourquoi **le sens fait partie de la description** d'une rotation.

Réponse. $M''(1; -4)$.

Correction de l'exercice 3 - Le demi-tour

a) Un tour complet vaut 360° . Un demi-tour dans un sens et un demi-tour dans l'autre mènent donc au **même point** : 180° dans un sens ou 180° dans l'autre ne se distinguent pas. Préciser le sens est inutile.

b) Le demi-tour de centre O est la **symétrie centrale** de centre O : le point O est le milieu de $[BB']$.

$$x_O = \frac{x_B + x_{B'}}{2} \quad y_O = \frac{y_B + y_{B'}}{2}$$

Comme $O(0; 0)$:

- $0 = \frac{2 + x_{B'}}{2}$, donc $2 + x_{B'} = 0$ et $x_{B'} = -2$;
- $0 = \frac{3 + y_{B'}}{2}$, donc $y_{B'} = -3$.

L'image est $B'(-2; -3)$.

Lecture directe. Un demi-tour autour de l'origine change simplement les **deux signes** : $(x; y)$ devient $(-x; -y)$.

Réponse. a) 180° dans un sens ou dans l'autre donnent le même point — b) $B'(-2; -3)$.

Correction de l'exercice 4 - Un centre qui n'est pas l'origine

Le demi-tour de centre C est la symétrie centrale de centre C : le point C est le **milieu** de $[MM']$.

$$x_C = \frac{x_M + x_{M'}}{2} \quad y_C = \frac{y_M + y_{M'}}{2}$$

Pour l'abscisse :

- $1 = \frac{4 + x_{M'}}{2}$
- $4 + x_{M'} = 2$
- $x_{M'} = -2$

Pour l'ordonnée :

- $1 = \frac{3 + y_M}{2}$
- $3 + y_M = 2$
- $y_M = -1$

L'image est $M'(-2; -1)$.

Contrôle sur la figure. De M à C : 3 à gauche et 2 en bas. De C à M' : encore 3 à gauche et 2 en bas. Le centre est bien au milieu ✓

Réponse. $M'(-2; -1)$.

Correction de l'exercice 5 – Quart de tour autour d'un autre point

On repère le déplacement du **centre** vers le point :

- de $C(2; 1)$ à $M(5; 1)$: $5 - 2 = 3$ à droite, et $1 - 1 = 0$ verticalement.

On fait pivoter ce déplacement d'un quart de tour dans le sens inverse des aiguilles :

- « 3 à droite » devient « 3 **en haut** » ;
- il n'y a pas de déplacement vertical à transformer.

On applique ce nouveau déplacement **à partir du centre C** :

- $x_{M'} = 2 + 0 = 2$;
- $y_{M'} = 1 + 3 = 4$.

L'image est $M'(2; 4)$.

L'erreur à ne pas faire. On part toujours du **centre**, jamais de l'origine du repère : ici, oublier de revenir en C donnerait $(0; 3)$, qui n'est pas à la bonne distance de C .

Réponse. $M'(2; 4)$.

Correction de l'exercice 6 – Reconnaître le sens

On compare les deux déplacements depuis le centre :

- de O à $P(3; 2)$: 3 à droite, 2 en haut ;
- de O à $P'(2; -3)$: 2 à droite, 3 en bas.

Appliquons la règle du quart de tour **dans le sens des aiguilles d'une montre** :

- « 3 à droite » devient « 3 en bas » ;
- « 2 en haut » devient « 2 à droite ».

Total : 2 à droite et 3 en bas, soit le point $(2; -3)$ — c'est exactement P' .

La rotation a donc été faite dans le **sens des aiguilles d'une montre**.

Contrôle visuel. Le point P est en haut à droite et son image en bas à droite : en tournant vers la gauche (sens inverse), on serait parti vers le haut à gauche. Le dessin confirme le calcul.

Réponse. Dans le sens des aiguilles d'une montre.

Correction de l'exercice 7 – Image d'un segment

On traite chaque point séparément, en partant du centre $O(0; 0)$.

Image de $A(1; 0)$. De O à A : 1 à droite. Après le quart de tour dans le sens inverse, « 1 à droite » devient « 1 en haut » :

- $A'(0; 1)$.

Image de $B(3; 2)$. De O à B : 3 à droite et 2 en haut. Après le quart de tour :

- « 3 à droite » devient « 3 en haut » ;
- « 2 en haut » devient « 2 à gauche ».
- $x_{B'} = 0 - 2 = -2$ et $y_{B'} = 0 + 3 = 3$, donc $B'(-2; 3)$.

Contrôle des longueurs. De A à B : 2 à droite et 2 en haut. De A' à B' : $-2 - 0 = -2$ (soit 2 à gauche) et $3 - 1 = 2$ en haut. Les deux segments ont le même écartement, donc la même longueur : la rotation a bien conservé AB ✓

Réponse. $A'(0; 1)$ et $B'(-2; 3)$.

Correction de l'exercice 8 - Demi-tour et symétrie centrale

Ce que dit la rotation d'angle 180° . L'image M' de M vérifie :

$$OM' = OM \quad \text{et} \quad \widehat{MOM'} = 180^\circ$$

Un angle de 180° est un **angle plat** : les points M , O et M' sont donc alignés, et M' se trouve de l'autre côté de O par rapport à M .

Avec $OM' = OM$, cela signifie exactement que O est le **milieu** de $[MM']$.

Ce que dit la symétrie centrale. Par définition, le symétrique de M par rapport à O est le point M' tel que O soit le milieu de $[MM']$.

Les deux définitions aboutissent à la même condition : **les deux transformations sont identiques.**

Conséquence pratique. Tout ce qu'on sait de la symétrie centrale (vue en Cinquième) s'applique au demi-tour, et réciproquement.

Réponse. Dans les deux cas, O est le milieu de $[MM']$.

Correction de l'exercice 9 - Trouver l'angle

Les quatre sommets d'un carré sont à la même distance du centre, et ils partagent le tour complet en quatre parts égales :

$$\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$$

a) Passer de A au sommet **suivant** B , c'est avancer d'un quart de tour dans le sens de la numérotation, ici le sens inverse des aiguilles d'une montre.

C'est la rotation de centre O , d'angle 90° , dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

b) Pour aller de A à C , il faut avancer de **deux** sommets, soit deux quarts de tour :

$$— 2 \times 90^\circ = 180^\circ$$

C'est la rotation d'angle 180° de centre O , c'est-à-dire la symétrie centrale de centre O — le sens n'a pas à être précisé. On le vérifie sur les coordonnées : $A(2; 0)$ et $C(-2; 0)$ sont bien symétriques par rapport à O .

Réponse. a) 90° dans le sens inverse des aiguilles — b) 180° (symétrie centrale de centre O).

Correction de l'exercice 10 - Trouver le centre

Une rotation d'angle 180° est une symétrie centrale : son centre C est le **milieu** de $[MM']$.

Les coordonnées du milieu d'un segment sont les moyennes des coordonnées de ses extrémités :

$$x_C = \frac{x_M + x_{M'}}{2} \quad y_C = \frac{y_M + y_{M'}}{2}$$

$$- x_C = \frac{6 + 0}{2} = 3 ;$$

$$- y_C = \frac{5 + 1}{2} = 3.$$

Le centre de la rotation est le point $C(3; 3)$.

Vérification. De $M(6; 5)$ à $C(3; 3)$: 3 à gauche, 2 en bas. De C à $M'(0; 1)$: encore 3 à gauche et 2 en bas ✓ Le point C est bien au milieu.

Réponse. $C(3; 3)$.

Correction de l'exercice 11 - Rotation autour d'un sommet

Le centre est $A(0; 0)$, qui se trouve être l'origine : les déplacements se lisent directement sur les coordonnées. Dans le sens des aiguilles d'une montre, « à droite » devient « en bas » et « en haut » devient « à droite ».

Image de $B(4; 0)$. De A à B : 4 à droite. Après rotation : 4 en bas.

$$- B'(0; -4).$$

Image de $C(4; 4)$. De A à C : 4 à droite et 4 en haut. Après rotation : 4 en bas et 4 à droite.

$$- C'(4; -4).$$

Image de $D(0; 4)$. De A à D : 4 en haut. Après rotation : 4 à droite.

$$- D'(4; 0).$$

Contrôle. L'image du carré est le carré $AB'C'D'$, de même côté 4 cm, posé sous l'axe des abscisses. Le sommet A , qui est le centre, n'a pas bougé ✓

Réponse. $B'(0; -4)$, $C'(4; -4)$ et $D'(4; 0)$.

Correction de l'exercice 12 - Enchaîner deux rotations

a) Les deux rotations ont le **même centre** et le **même sens** : les angles s'ajoutent.

$$60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$$

Une seule rotation de centre O , d'angle 90° , dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, donne le même résultat.

b) Deux demi-tours de même centre donnent un angle total de :

$$180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$$

Un tour complet ramène chaque point à sa position de départ : l'image finale est **le point lui-même**. Les deux demi-tours s'annulent.

Conséquence utile. Le symétrique du symétrique d'un point par rapport au même centre, c'est le point de départ.

Réponse. a) une rotation de 90° dans le sens inverse des aiguilles — b) on revient au point de départ.

Correction de l'exercice 13 - Un tour complet

Première question. Un angle de 360° correspond à un **tour complet** : chaque point revient exactement à sa place. L'image de toute figure est la figure elle-même. L'élève a raison : cette rotation ne change rien.

Seconde question. Trois demi-tours enchaînés donnent un angle total de :

$$3 \times 180^\circ = 540^\circ$$

Or on peut retirer un tour complet sans rien changer :

$$- 540^\circ - 360^\circ = 180^\circ$$

Trois demi-tours reviennent donc à **un seul demi-tour**, c'est-à-dire à la symétrie centrale de centre O .

La règle. On enlève autant de tours complets (360°) que nécessaire pour ramener l'angle entre 0° et 360° : c'est ce qui permet de simplifier n'importe quel enchaînement.

Réponse. Oui, 360° ne change rien ; trois demi-tours équivalent à un demi-tour (180°).

Correction de l'exercice 14 - Corriger une erreur de sens

On part du déplacement de O vers $N(0; 3)$: **3 en haut**, aucun déplacement horizontal.

Dans le sens des aiguilles d'une montre, « en haut » devient « à droite » :

— 3 en haut devient 3 à droite.

— $x_N = 0 + 3 = 3$ et $y_N = 0$, donc $N'(3; 0)$.

L'élève a répondu $(-3; 0)$: il a tourné dans le **mauvais sens**, celui inverse des aiguilles.

Comment se repérer sans hésiter. On imagine une horloge centrée en O : le point N est sur le « 12 ». Dans le sens des aiguilles, le 12 va vers le **3**, c'est-à-dire vers la droite. Donc $N'(3; 0)$.

Réponse. Non : $N'(3; 0)$, l'élève a tourné dans l'autre sens.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : quatre rotations

a) De O à A : 5 à droite. Dans le sens inverse des aiguilles, cela devient 5 en haut : l'image est $A'(0; 5)$.

b) De O à B : 2 en bas. Dans le sens des aiguilles, « en bas » devient « à gauche » : l'image est $B'(-2; 0)$.

c) Un demi-tour autour de l'origine change les deux signes :

$$(x; y) \mapsto (-x; -y)$$

L'image est $C'(3; -4)$.

d) Demi-tour de centre $E(1; 2)$: le point E est le milieu de $[DD']$.

$$- 1 = \frac{5 + x_{D'}}{2}, \text{ donc } 5 + x_{D'} = 2 \text{ et } x_{D'} = -3 ;$$

$$- 2 = \frac{2 + y_{D'}}{2}, \text{ donc } 2 + y_{D'} = 4 \text{ et } y_{D'} = 2.$$

L'image est $D'(-3; 2)$.

Bilan. Quart de tour $\Rightarrow$ on fait pivoter le déplacement compté depuis le centre. Demi-tour $\Rightarrow$ le centre est le milieu.

Réponse. a) $(0; 5)$ — b) $(-2; 0)$ — c) $(3; -4)$ — d) $(-3; 2)$.