

Plaquette 3 – Ce que les transformations conservent

Translations et rotations — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le principe. Une translation, une rotation, une symétrie axiale ou centrale transforment une figure en une figure **superposable** : on peut poser l'une exactement sur l'autre.

Ce qui est conservé — et qu'on peut donc recopier sans calcul :

Grandeur	Sur l'image	
les longueurs	identiques	
les mesures d'angles	identiques	
les aires	identiques	
le périmètre	identique	
l'alignement de trois points	conservé	
le parallélisme de deux droites	conservé	
la perpendicularité	conservée	
le milieu d'un segment	reste le milieu	
la nature de la figure (carré, cercle...)	inchangée	

Ce qui change : la **position** de la figure. Et rien d'autre — sauf pour une symétrie **axiale**, qui retourne la figure comme dans un miroir.

Rédiger une justification. On nomme la transformation, puis la propriété :

> « $A'B'C'$ est l'image de ABC par une translation ; or une translation conserve les longueurs, donc $A'B' = AB = 7$ cm. »

Conséquence sur les triangles. Une figure et son image sont **égales** au sens du chapitre 9 : leurs côtés et leurs angles se correspondent deux à deux.

Aire d'un triangle :

$$A = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

Correction de l'exercice 1 – Longueurs conservées

Une rotation **conserve les longueurs** : chaque côté de l'image a exactement la même longueur que le côté correspondant de la figure de départ.

- $A'B' = AB = 6,4$ cm ;
- $B'C' = BC = 9$ cm ;
- $C'A' = CA = 5,2$ cm.

Rédaction attendue. On ne se contente pas de recopier les nombres : la phrase « une rotation conserve les longueurs » est la justification, et c'est elle qui est attendue en contrôle.

Réponse. $A'B' = 6,4$ cm, $B'C' = 9$ cm, $C'A' = 5,2$ cm.

Correction de l'exercice 2 - Angles conservés

Une translation **conserve les mesures d'angles**. Comme $A \rightarrow D$ et $B \rightarrow E$:

$$- \hat{D} = \hat{A} = 42^\circ ;$$

$$- \hat{E} = \hat{B} = 73^\circ.$$

Pour le troisième, on utilise la somme des angles d'un triangle :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$- \hat{C} = 180 - 42 - 73 = 65^\circ$$

Et par conservation, $\hat{F} = \hat{C} = 65^\circ$.

Contrôle. $42 + 73 + 65 = 180$ ✓ La somme est bien respectée dans les deux triangles.

Réponse. $\hat{D} = 42^\circ$, $\hat{E} = 73^\circ$ et $\hat{F} = 65^\circ$.

Correction de l'exercice 3 - Aires conservées

a) Une rotation conserve les longueurs : les côtés de R' mesurent eux aussi 7 cm et 4 cm. Seule l'**orientation** du rectangle sur la feuille a changé — il est « couché » au lieu d'être « debout ».

b) L'aire d'un rectangle vaut :

$$A = L \times l = 7 \times 4 = 28$$

L'aire de R' est de 28 cm^2 , la même que celle du rectangle de départ.

Deux façons de le voir. Soit on recalcule avec les dimensions conservées, soit on invoque directement la conservation des aires : les deux sont acceptées, la seconde est plus rapide.

Réponse. a) 7 cm sur 4 cm — b) 28 cm^2 .

Correction de l'exercice 4 - L'alignement

a) **Oui.** Une rotation conserve l'alignement : l'image d'une droite est une droite, donc trois points alignés ont des images alignées, et dans le même ordre.

b) Comme B est **entre** A et C , on a :

$$- AC = AB + BC = 3 + 5 = 8 \text{ cm.}$$

Les longueurs étant conservées :

$$- A'C' = AC = 8 \text{ cm.}$$

Autre méthode. On peut aussi dire $A'B' = 3 \text{ cm}$, $B'C' = 5 \text{ cm}$, et comme B' est entre A' et C' (l'ordre est conservé), $A'C' = 3 + 5 = 8 \text{ cm}$.

Le point délicat. Sans la conservation de l'**ordre** des points, on ne pourrait pas additionner : si B' n'était pas entre A' et C' , on trouverait $5 - 3 = 2 \text{ cm}$.

Réponse. a) oui — b) $A'C' = 8 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 5 - Le parallélisme

a) Une translation **conserve le parallélisme** : les droites (d_1') et (d_2') sont **parallèles** entre elles.

Dans le cas particulier de la translation, on peut même dire plus : chaque droite image est parallèle à la droite de départ, puisque toute la figure glisse sans pivoter.

b) Une rotation **conserve la perpendicularité** : les images de deux droites

perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires.

En revanche, une rotation de 90° fait pivoter chaque droite d'un quart de tour : l'image d'une droite n'est **pas** parallèle à cette droite, elle lui est perpendiculaire.

À distinguer. « Le parallélisme entre deux droites est conservé » ne veut pas dire « chaque droite reste parallèle à elle-même » : c'est vrai pour une translation, faux pour une rotation.

Réponse. a) elles restent parallèles — b) leurs images restent perpendiculaires.

Correction de l'exercice 6 - Le milieu

a) Une translation conserve l'alignement et les longueurs. Comme I est sur $[AB]$ avec $AI = IB$, son image I' est sur $[A'B']$ avec $A'I' = I'B'$:

I' est le **milieu** de $[A'B']$.

b) Le milieu partage le segment en deux parties égales :

$$A'I' = \frac{A'B'}{2}$$

Or $A'B' = AB = 11$ cm (longueurs conservées), donc :

$$— A'I' = \frac{11}{2} = 5,5 \text{ cm.}$$

Ce qu'il faut retenir. Un point remarquable (milieu, pied d'une hauteur, centre d'un cercle) a pour image le point remarquable correspondant de la figure image.

Réponse. a) I' est le milieu de $[A'B']$ — b) $A'I' = 5,5$ cm.

Correction de l'exercice 7 - Le périmètre

a) Le périmètre est la somme des longueurs des côtés :

$$— P = 3 + 5 + 3 + 7 = 18 \text{ cm.}$$

b) Une symétrie centrale conserve les longueurs, donc chaque côté de l'image a la même longueur que le côté correspondant. Leur **somme** est donc elle aussi inchangée :

$$— P' = P = 18 \text{ cm.}$$

La justification attendue. « Une symétrie centrale conserve les longueurs, donc elle conserve le périmètre. » Une seule phrase suffit — inutile de réécrire l'addition.

Réponse. a) 18 cm — b) 18 cm aussi.

Correction de l'exercice 8 - La nature de la figure

Une transformation du chapitre donne toujours une figure **superposable** à la figure de départ : sa nature ne change jamais.

a) L'image est un **cercle**, de même rayon 3 cm. Son centre est l'image du centre de départ.

b) L'image est un **carré**, de même côté. Il est simplement posé « en biais » sur la feuille : c'est sa position qui change, pas sa nature.

c) L'image est un **triangle rectangle**, de mêmes dimensions. La perpendicularité étant conservée, l'angle droit reste un angle droit.

Erreur fréquente en b). Croire qu'un carré tourné de 45° devient un losange : c'est toujours un carré, et un carré est d'ailleurs déjà un losange particulier.

Réponse. a) un cercle de rayon 3 cm — b) un carré — c) un triangle rectangle.

Correction de l'exercice 9 - Calculer une longueur de l'image

Étape 1 : calculer BC dans le triangle de départ. Le triangle ABC est rectangle en A , d'hypoténuse $[BC]$. D'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

- $BC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$
- $BC = \sqrt{100} = 10$, donc $BC = 10$ cm.

Étape 2 : passer à l'image. Une rotation conserve les longueurs, donc :

- $B'C' = BC = 10$ cm.

La méthode générale. On calcule toujours dans la figure où l'on a les données, puis on transporte le résultat sur l'image grâce à la conservation. Inutile de connaître le centre ni l'angle de la rotation.

Réponse. $B'C' = 10$ cm.

Correction de l'exercice 10 - Calculer un angle de l'image

Étape 1 : les angles de ABC . Le triangle est isocèle en A , donc les angles à la base sont égaux : $\hat{B} = \hat{C}$. La somme des angles vaut 180° :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

- $40 + 2 \times \hat{B} = 180$
- $2 \times \hat{B} = 140$
- $\hat{B} = 70^\circ$, et donc $\hat{C} = 70^\circ$.

Étape 2 : l'image. Une translation conserve les mesures d'angles :

- $\hat{A}' = 40^\circ$, $\hat{B}' = 70^\circ$ et $\hat{C}' = 70^\circ$.

Remarque. Le triangle image est lui aussi isocèle : la nature de la figure est conservée, ce qui fournit un contrôle immédiat.

Réponse. 40° , 70° et 70° .

Correction de l'exercice 11 - Calculer une aire

a) L'aire d'un triangle vaut :

$$A = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

- $A = \frac{9 \times 6}{2} = \frac{54}{2} = 27$

L'aire du triangle de départ est de 27 cm^2 .

b) Une rotation conserve les aires :

- $A' = 27 \text{ cm}^2$.

Attention à ne pas confondre avec le chapitre 9. Dans un **agrandissement** de rapport k , l'aire est multipliée par k^2 . Ici il ne s'agit pas d'un agrandissement mais d'un simple déplacement : l'aire ne change pas du tout.

Réponse. a) 27 cm^2 — b) 27 cm^2 également.

Correction de l'exercice 12 - Ce qui change vraiment

La phrase se complète par : « seule sa **position** change ».

Le cas de la symétrie axiale. Elle conserve elle aussi les longueurs, les angles et les aires. Mais elle **retourne** la figure, comme le ferait un miroir : la figure image n'est plus orientée dans le même sens.

Concrètement : si l'on découpe la figure de départ dans du papier, on peut la poser sur son image obtenue par translation ou rotation **sans la retourner** ; pour une symétrie axiale, il faut retourner le papier.

Ce que cela ne change pas. Dans tous les cas, pour deux points quelconques M et N d'images M' et N' :

$$M'N' = MN$$

Le mot juste. On dit qu'une translation et une rotation **conservent l'orientation**, alors qu'une symétrie axiale l'inverse. C'est la seule différence entre ces transformations.

Réponse. Seule sa **position** change ; la symétrie axiale, elle, retourne la figure.

Correction de l'exercice 13 - Vrai ou faux

a) **Faux.** Une rotation conserve les longueurs : elle déplace la figure sans la déformer. C'est un agrandissement de rapport 1, autrement dit aucun agrandissement.

b) **Vrai.** Les longueurs sont conservées : l'image mesure exactement 5 cm.

c) **Faux.** La nature de la figure est conservée : l'image d'un carré est un carré. Pour obtenir un rectangle non carré, il faudrait déformer la figure, ce qu'aucune transformation du chapitre ne fait.

d) **Vrai.** Le centre est le seul point qui ne bouge pas dans une rotation : sa distance à lui-même est nulle, il reste donc à sa place quel que soit l'angle.

Remarque sur d). Une translation, elle, ne laisse **aucun** point en place (sauf si le glissement est nul) : c'est une différence commode pour reconnaître les deux transformations.

Réponse. a) faux — b) vrai — c) faux — d) vrai.

Correction de l'exercice 14 - Un problème complet

a) Dans un rectangle, tous les angles sont droits : le triangle ABC est rectangle en B , d'hypoténuse $[AC]$. D'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$— AC^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$$

$$— AC = \sqrt{169} = 13, \text{ donc } AC = 13 \text{ cm.}$$

b) Une rotation conserve les longueurs :

$$— A'C' = AC = 13 \text{ cm.}$$

c) L'aire du rectangle de départ vaut :

$$A = L \times l = 12 \times 5 = 60$$

soit 60 cm². Une rotation conserve les aires, donc l'aire de $A'B'C'D'$ est également de 60 cm².

Ce qu'on n'a pas eu besoin de faire. Ni construire la figure image, ni connaître le sens de la rotation : les propriétés de conservation suffisent à répondre aux trois questions.

Réponse. a) $AC = 13$ cm — b) $A'C' = 13$ cm — c) 60 cm².

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : quatre déductions

- a) Une translation conserve les **longueurs** : $A'B' = AB = 7,5 \text{ cm}$.
- b) Une translation conserve les **mesures d'angles** : $\hat{B}' = \hat{B} = 55^\circ$.
- c) Une translation conserve les **aires** : l'aire de $A'B'C'$ vaut 24 cm^2 .
- d) Une translation conserve la **perpendicularité** : les droites $(A'B')$ et $(A'C')$ sont perpendiculaires.

Le réflexe du chapitre. Dans ce type de question, on ne calcule jamais : on recopie la valeur **en citant la propriété**. C'est la citation qui rapporte les points.

Réponse. a) $7,5 \text{ cm}$ — b) 55° — c) 24 cm^2 — d) elles sont perpendiculaires.