

## Plaquette 4 – Reconnaître la transformation

### Translations et rotations — Quatrième

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

##### Le tableau de décision.

| Indice observé                                            | Transformation                              |  |
|-----------------------------------------------------------|---------------------------------------------|--|
| tous les points glissent <b>pareil</b>                    | <b>translation</b>                          |  |
| un seul point fixe, figure tournée                        | <b>rotation</b>                             |  |
| un seul point fixe, figure « à l'envers » (demi-tour)     | <b>symétrie centrale</b> (rotation de 180°) |  |
| toute une <b>droite</b> de points fixes, figure retournée | <b>symétrie axiale</b>                      |  |

**Test de la translation.** On calcule le déplacement pour chaque couple de points correspondants :

$$a = x_{A'} - x_A \quad b = y_{A'} - y_A$$

Si tous les couples donnent **le même**  $(a; b)$ , c'est une translation ; sinon, non.

**Test de la symétrie centrale.** Les segments  $[AA']$ ,  $[BB']$ ,  $[CC']$  ont tous **le même milieu** : c'est le centre. On le calcule avec

$$x_C = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \quad y_C = \frac{y_A + y_{A'}}{2}$$

et on vérifie qu'on trouve le même point avec les autres couples.

**Test de la symétrie axiale.** L'axe est la **médiatrice** de  $[AA']$ , et c'est la même pour tous les couples. Sur un quadrillage, l'axe est souvent une droite horizontale, verticale, ou une diagonale.

**Le repère de l'orientation.** Translation et rotation **conservent** l'orientation (on peut superposer sans retourner) ; une symétrie axiale l'inverse (il faut retourner la feuille).

**Attention.** Une symétrie centrale est un cas particulier de rotation : les deux réponses sont correctes, mais « symétrie centrale » est plus précis.

#### Correction de l'exercice 1 - Le test du glissement

On calcule le déplacement de chaque couple de sommets correspondants :

- $A(1; 1) \rightarrow A'(6; 3)$  :  $6 - 1 = 5$  et  $3 - 1 = 2$ , soit  $(+5; +2)$  ;
- $B(4; 2) \rightarrow B'(9; 4)$  :  $9 - 4 = 5$  et  $4 - 2 = 2$ , soit  $(+5; +2)$  ;
- $C(2; 4) \rightarrow C'(7; 6)$  :  $7 - 2 = 5$  et  $6 - 4 = 2$ , soit  $(+5; +2)$ .

Les trois déplacements sont **identiques**. Il s'agit donc de la **translation** « +5 en abscisse, +2 en ordonnée ».

**Ce que confirme la figure.** Les deux triangles sont orientés de la même façon : la figure a glissé sans tourner ni se retourner.

**Réponse.** La translation « +5 en abscisse, +2 en ordonnée ».

## Correction de l'exercice 2 - Le test du milieu

**On teste d'abord la translation.**

- $A \rightarrow A' : (+6 ; +2) ;$
- $B \rightarrow B' : 5 - 3 = 2 \text{ et } 5 - 1 = 4, \text{ soit } (+2 ; +4).$

Les déplacements diffèrent : ce n'est **pas** une translation.

**On teste la symétrie centrale**, en cherchant le milieu de chaque segment reliant un point à son image :

$$x = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \quad y = \frac{y_A + y_{A'}}{2}$$

- milieu de  $[AA'] : \left( \frac{1+7}{2} ; \frac{2+4}{2} \right) = (4 ; 3) ;$
- milieu de  $[BB'] : \left( \frac{3+5}{2} ; \frac{1+5}{2} \right) = (4 ; 3) ;$
- milieu de  $[CC'] : \left( \frac{2+6}{2} ; \frac{5+1}{2} \right) = (4 ; 3).$

Les trois milieux sont **le même point**  $O(4 ; 3)$ .

Il s'agit donc de la **symétrie centrale de centre**  $O(4 ; 3)$ , autrement dit de la rotation d'angle  $180^\circ$  de centre  $O$ .

**Réponse.** La symétrie centrale de centre  $O(4 ; 3)$  (demi-tour).

## Correction de l'exercice 3 - Un quart de tour

**Ce n'est pas une translation** : de  $A$  à  $A'$  le déplacement est  $(-2 ; +2)$ , de  $B$  à  $B'$  il est  $(-5 ; +3)$ .

**Ce n'est pas une symétrie centrale** : le milieu de  $[AA']$  est  $(1 ; 1)$ , celui de  $[BB']$  est  $\left( \frac{4-1}{2} ; \frac{1+4}{2} \right) = (1,5 ; 2,5)$ . Les deux milieux diffèrent.

**On teste le quart de tour de centre  $O$ , sens inverse des aiguilles.** La règle : « à droite » devient « en haut », « en haut » devient « à gauche ».

- $A(2 ; 0) : \text{de } O \text{ à } A, 2 \text{ à droite} \rightarrow 2 \text{ en haut, soit } (0 ; 2). \text{ C'est bien } A' \checkmark$
- $B(4 ; 1) : \text{de } O \text{ à } B, 4 \text{ à droite et } 1 \text{ en haut} \rightarrow 4 \text{ en haut et } 1 \text{ à gauche, soit } (-1 ; 4). \text{ C'est bien } B' \checkmark$

Il s'agit de la **rotation de centre  $O$ , d'angle  $90^\circ$ , dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.**

**Réponse.** La rotation de centre  $O$ ,  $90^\circ$ , sens inverse des aiguilles d'une montre.

## Correction de l'exercice 4 - Une symétrie axiale

On observe les coordonnées : l'abscisse ne change jamais, et l'ordonnée change de **signe**.

- $A(1 ; 2) \rightarrow A'(1 ; -2) ;$
- $B(4 ; 1) \rightarrow B'(4 ; -1) ;$
- $C(3 ; 5) \rightarrow C'(3 ; -5).$

Chaque point et son image sont donc à la **même distance de l'axe des abscisses**, de part et d'autre, sur une même verticale.

C'est la définition de la **symétrie axiale d'axe l'axe des abscisses** (la droite des  $x$ ).

**Confirmation par l'orientation.** En parcourant  $A, B, C$ , on tourne dans un sens ; en

parcourant  $A', B', C'$ , on tourne dans l'autre. La figure a été **retournée**, ce qu'aucune translation ni rotation ne fait.

**À ne pas confondre.** Une symétrie centrale de centre  $O$  aurait changé **les deux** signes :  $A$  serait devenu  $(-1; -2)$ .

**Réponse.** La symétrie axiale d'axe l'axe des abscisses.

### Correction de l'exercice 5 - Deux candidats

On cherche d'abord le centre, en calculant les milieux :

- milieu de  $[AA']$  :  $\left(\frac{3-3}{2}; \frac{4-4}{2}\right) = (0; 0)$  ;
- milieu de  $[BB']$  :  $\left(\frac{1-1}{2}; \frac{0+0}{2}\right) = (0; 0)$ .

Les deux milieux sont l'origine  $O$  : il s'agit de la **symétrie centrale de centre  $O$** .

**Les deux élèves ont raison.** Une symétrie centrale **est** une rotation : celle d'angle  $180^\circ$  et de même centre. Dire « rotation » n'est pas faux, mais « symétrie centrale de centre  $O$  » est plus précis, car cette réponse donne à la fois l'angle et le centre.

**La formulation attendue en contrôle.** On nomme la transformation la plus précise, et on donne **tous** ses éléments : ici, le centre  $O(0; 0)$ .

**Réponse.** Les deux : c'est la symétrie centrale de centre  $O$ , c'est-à-dire la rotation de  $180^\circ$  de centre  $O$ .

### Correction de l'exercice 6 - Chercher le point fixe

On calcule les déplacements :

- $A \rightarrow A'$  :  $(+6; 0)$  ;
- $B \rightarrow B'$  :  $11 - 5 = 6$  et  $1 - 1 = 0$ , soit  $(+6; 0)$ .

Les deux déplacements sont identiques : la transformation est la **translation** « +6 en abscisse, 0 en ordonnée ».

**Un point fixe est-il possible ?** Un tel point  $I(x; y)$  vérifierait à la fois

$$x + 6 = x \quad \text{et} \quad y + 0 = y$$

La première égalité donne  $6 = 0$  : c'est impossible.

Une translation de glissement non nul ne laisse **aucun** point en place : le point  $I$  décrit dans l'énoncé ne peut pas exister.

**Le critère à retenir.** Chercher un point fixe est souvent le plus rapide : aucun point fixe  $\Rightarrow$  translation ; un seul  $\Rightarrow$  rotation ; toute une droite  $\Rightarrow$  symétrie axiale.

**Réponse.** Non : c'est une translation  $(+6; 0)$ , qui n'a aucun point fixe.

### Correction de l'exercice 7 - Lire une figure

Les deux drapeaux ont exactement la même forme et la **même orientation** : le mât est à gauche dans les deux cas, et le rectangle part vers la droite. La figure n'a été ni tournée ni retournée.

On vérifie le glissement sur le pied du mât :

- $P(1; 1) \rightarrow P'(7; 1)$  :  $7 - 1 = 6$  et  $1 - 1 = 0$ , soit  $(+6; 0)$ .

On contrôle sur un second point, le sommet du mât :

- $(1; 6) \rightarrow (7; 6)$  : également  $(+6; 0)$  ✓

Il s'agit de la **translation** « +6 en abscisse, 0 en ordonnée », c'est-à-dire un

glissement de 6 carreaux vers la droite.

**Le réflexe visuel.** Deux figures identiques et « parallèles » entre elles : on pense translation, et on confirme par le calcul sur deux points au moins.

**Réponse.** La translation de 6 carreaux vers la droite (« +6 ; 0 »).

## Correction de l'exercice 8 - Translation ou symétrie ?

### Test de la translation.

- $A \rightarrow A' : (0 ; +4) ;$
- $B \rightarrow B' : 5 - 5 = 0$  et  $4 - 2 = 2$ , soit  $(0 ; +2)$ .

Les deux déplacements sont différents : ce n'est **pas** une translation.

**Test de la symétrie axiale.** L'abscisse ne change pas et l'ordonnée se transforme : l'axe est donc **horizontal**. Il passe par le milieu de chaque segment  $[AA']$  et  $[BB']$  :

- milieu de  $[AA']$  : ordonnée  $\frac{1+5}{2} = 3 ;$
- milieu de  $[BB']$  : ordonnée  $\frac{2+4}{2} = 3.$

Les deux milieux sont à l'ordonnée 3 : l'axe est la droite horizontale d'équation «  $y = 3$  », c'est-à-dire la droite passant par tous les points d'ordonnée 3.

Il s'agit de la **symétrie axiale** d'axe cette droite horizontale.

**Ce qui a mis sur la piste.** Un déplacement uniquement vertical, mais d'amplitude **variable** : c'est la signature d'une symétrie d'axe horizontal, car plus un point est loin de l'axe, plus il se déplace.

**Réponse.** Non : symétrie axiale d'axe la droite horizontale d'ordonnée 3.

## Correction de l'exercice 9 - Reconnaître par l'orientation

Une translation et une rotation **conservent l'orientation** : la figure glisse ou pivote, mais reste « du même côté ». On peut toujours superposer sans retourner la feuille.

Comme ici il faut retourner la feuille, ces deux transformations sont **exclues**.

La transformation qui **inverse** l'orientation est la **symétrie axiale**.

**Le critère en une phrase.** Faut-il retourner la figure ? Oui  $\Rightarrow$  symétrie axiale. Non  $\Rightarrow$  translation ou rotation, et on distingue alors les deux en cherchant un point fixe.

**Attention au piège.** La symétrie **centrale** ne retourne pas la figure : c'est une rotation de  $180^\circ$ , elle conserve l'orientation. Ne pas la confondre avec la symétrie axiale malgré le nom voisin.

**Réponse.** Seule une symétrie axiale ; translation et rotation sont exclues.

## Correction de l'exercice 10 - Le test complet

**Un point fixe.** On remarque que  $A'$  a les mêmes coordonnées que  $A$  : le point  $A(1 ; 1)$  **ne bouge pas**. Ce n'est donc pas une translation, et c'est le candidat naturel pour être le centre d'une rotation.

**Test du quart de tour de centre  $A$ , sens inverse des aiguilles.** Règle : « à droite » devient « en haut », « en haut » devient « à gauche ».

- $B(5 ; 1)$  : de  $A$  à  $B$ , 4 à droite  $\rightarrow$  4 en haut, soit  $(1 ; 1 + 4) = (1 ; 5)$ . C'est  $B'$  ✓
- $C(1 ; 3)$  : de  $A$  à  $C$ , 2 en haut  $\rightarrow$  2 à gauche, soit  $(1 - 2 ; 1) = (-1 ; 1)$ . C'est  $C'$  ✓

Il s'agit de la **rotation de centre  $A(1 ; 1)$ , d'angle  $90^\circ$ , dans le sens inverse des aiguilles d'une montre**.

**Méthode générale.** Repérer un point fixe donne immédiatement le centre ; il ne reste plus qu'à tester l'angle et le sens sur un second point.

**Réponse.** Rotation de centre  $A(1 ; 1)$ ,  $90^\circ$ , sens inverse des aiguilles.

### Correction de l'exercice 11 – Deux transformations possibles

Les quatre sommets d'un carré se répartissent également autour du centre : chaque quart de tour envoie chaque sommet sur le sommet suivant, donc le carré sur lui-même.

$$\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$$

Deux exemples :

- la rotation de centre  $O$  et d'angle  $90^\circ$  : chaque sommet prend la place du suivant, la figure d'ensemble ne change pas ;
- la rotation de centre  $O$  et d'angle  $180^\circ$  (la symétrie centrale de centre  $O$ ) : chaque sommet prend la place du sommet opposé.

On pourrait aussi citer  $270^\circ$ , ou  $360^\circ$  (qui ne bouge rien du tout).

**Le vocabulaire.** On dit que le carré est **invariant** par ces rotations : la figure globale est inchangée, même si les sommets ont changé de place. C'est ce qui fait la régularité des rosaces et des pavages.

**Réponse.** Les rotations de centre  $O$  d'angle  $90^\circ$  et  $180^\circ$  (et aussi  $270^\circ$ ).

### Correction de l'exercice 12 – Éliminer les fausses pistes

- a) **Oui, c'est possible.**  $0 + 3 = 3$  et  $3 - 3 = 0$  : la translation donne bien  $A'(3 ; 0)$ .
- b) **Oui aussi.** De  $O$  à  $A$  : 3 en haut. Dans le sens des aiguilles, « en haut » devient « à droite » : on obtient  $(3 ; 0)$ , soit  $A'$ .
- c) **Oui encore.** La symétrie par rapport à la « première diagonale » échange l'abscisse et l'ordonnée :  $(0 ; 3)$  devient  $(3 ; 0)$ .
- d) Les trois transformations donnent la même image pour **ce point-là**. Un seul couple point-image ne suffit donc jamais à identifier une transformation.

Il faut l'image d'un **second point** : on teste alors les trois candidates, et une seule survivra.

**La leçon.** Toujours vérifier sur au moins deux points — trois pour une figure, c'est plus sûr.

**Réponse.** a), b) et c) sont toutes possibles ; il manque l'image d'un second point.

### Correction de l'exercice 13 – Enchaînement de deux transformations

- a) **Première symétrie.** La symétrie centrale de centre  $O$  change les deux signes :

$$(x ; y) \mapsto (-x ; -y)$$

- $M(4 ; -1)$  devient  $M_1(-4 ; 1)$ .

**Seconde symétrie**, appliquée à  $M_1$  :

- $M_1(-4 ; 1)$  devient  $M_2(4 ; -1)$ .

L'image finale est  $M_2(4 ; -1)$ , c'est-à-dire  $M$  **lui-même**.

- b) L'enchaînement correspond à deux demi-tours de même centre, soit  $180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$  : un tour complet, qui ne change rien.

On peut donc le remplacer par la transformation qui ne déplace aucun point — la

translation de glissement nul, ou, si l'on préfère, la rotation d'angle  $360^\circ$ .

**Formulation simple attendue.** « L'enchaînement ramène chaque point à sa place de départ. »

**Réponse.** a)  $M_2(4; -1)$ , c'est-à-dire  $M$  — b) rien ne bouge (tour complet).

### Correction de l'exercice 14 – Justifier une réponse

Le raisonnement est **incorrect**. Être superposables signifie seulement que les deux triangles sont **égaux** : c'est vrai pour une translation, mais aussi pour une rotation, une symétrie centrale et une symétrie axiale.

Autrement dit, la superposabilité est une **conséquence** de ces transformations, pas un moyen de les distinguer.

Pour conclure à une translation, il faut vérifier que **tous** les couples de points correspondants glissent de la même façon :

$$x_{A'} - x_A = x_{B'} - x_B = x_{C'} - x_C$$

et de même pour les ordonnées.

**Contre-exemple immédiat.** Un triangle et son image par un demi-tour sont superposables, et pourtant aucune translation ne les relie.

**Réponse.** Non : superposables vaut aussi pour les rotations et symétries ; il faut tester le glissement sur tous les points.

### Correction de l'exercice 15 – Synthèse : quatre identifications

a) Déplacements :  $(+3; +2)$  et  $(+3; +2)$  — identiques. C'est la **translation « +3 en abscisse, +2 en ordonnée »**.

b) Les deux coordonnées changent de signe. Milieu de  $[AA']$  :  $(0; 0)$  ; milieu de  $[BB']$  :  $(0; 0)$ . C'est la **symétrie centrale de centre  $O$** .

c) L'abscisse ne change pas, l'ordonnée change de signe : chaque point et son image sont de part et d'autre de l'axe des abscisses. C'est la **symétrie axiale d'axe l'axe des abscisses**.

d) Test du quart de tour de centre  $O$ , sens inverse des aiguilles :  $A(2; 0)$ , soit 2 à droite, devient 2 en haut, donc  $(0; 2)$  ✓ ;  $B(3; 1)$ , soit 3 à droite et 1 en haut, devient 3 en haut et 1 à gauche, donc  $(-1; 3)$  ✓ C'est la **rotation de centre  $O$ ,  $90^\circ$ , sens inverse des aiguilles**.

**Bilan de méthode.** On teste dans cet ordre : glissement identique (translation), milieu commun (symétrie centrale), une seule coordonnée qui change de signe (symétrie axiale), puis quart de tour.

**Réponse.** a) translation  $(+3; +2)$  — b) symétrie centrale de centre  $O$  — c) symétrie axiale d'axe des abscisses — d) rotation de  $90^\circ$  de centre  $O$ .