

Plaquette 5 – Frises, pavages et problèmes

Translations et rotations — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Frise. Motif répété par une même translation. Le n -ième motif se déduit du premier par $n - 1$ applications :

$$x_n = x_1 + (n - 1) \times a \quad y_n = y_1 + (n - 1) \times b$$

Rosace. Motif répété par rotations de même centre. Pour n motifs régulièrement répartis autour du centre, l'angle entre deux motifs consécutifs vaut :

$$\frac{360^\circ}{n}$$

Pavage. Recouvrement du plan sans trou ni chevauchement, obtenu en combinant translations, rotations et symétries.

Ce qui se conserve : longueurs, angles, aires. Tous les motifs d'une frise ou d'une rosace sont donc **superposables** : ils ont la même aire et le même périmètre.

Aires utiles.

$$A_{\text{rectangle}} = L \times \ell \quad A_{\text{triangle}} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

Le piège du comptage. Entre le 1^{er} et le n -ième motif, il y a $n - 1$ intervalles, pas n . Faire un petit dessin de trois motifs suffit à s'en convaincre.

Rédaction attendue. On décrit la transformation avec **tous** ses éléments : « la translation qui fait glisser de 5 carreaux vers la droite », « la rotation de centre O et d'angle 45° dans le sens des aiguilles d'une montre ».

Correction de l'exercice 1 – Construire une frise

a) On calcule le déplacement entre deux motifs consécutifs :

$$a = x_{M_2} - x_{M_1} = 4 - 1 = 3 \quad b = y_{M_2} - y_{M_1} = 2 - 2 = 0$$

C'est la **translation** « +3 en abscisse, 0 en ordonnée » : un glissement de 3 carreaux vers la droite.

b) Pour passer de M_1 à M_5 , on applique la translation $5 - 1 = 4$ fois. Le glissement total vaut :

- $4 \times 3 = 12$
- $x_{M_5} = 1 + 12 = 13$;
- $y_{M_5} = 2$.

Le cinquième motif a son coin en $M_5(13; 2)$.

Contrôle sur la figure. M_4 est en $x = 10$; le suivant est donc à $10 + 3 = 13$ ✓

Réponse. a) translation de 3 carreaux vers la droite — b) $M_5(13; 2)$.

Correction de l'exercice 2 – Compter les motifs

On appelle n le nombre de motifs. Le dernier se déduit du premier par $n - 1$ translations de 4 carreaux :

$$x_n = x_1 + (n - 1) \times 4$$

- $46 = 2 + (n - 1) \times 4$
- $(n - 1) \times 4 = 44$
- $n - 1 = \frac{44}{4} = 11$
- $n = 12$

La frise comporte **12 motifs**.

Le piège. Calculer $\frac{46-2}{4} = 11$ donne le nombre d'**intervalles**, pas le nombre de motifs. Il faut ajouter 1, comme pour compter les piquets d'une clôture.

Vérification. Premier motif en 2, douzième en $2 + 11 \times 4 = 2 + 44 = 46$ ✓

Réponse. 12 motifs.

Correction de l'exercice 3 - La rosace

a) Les 8 pétales se partagent le tour complet en parts égales :

$$\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

On passe d'un pétale au suivant par une rotation de centre O et d'angle 45° (le sens dépend du sens de parcours choisi, mais il doit être précisé).

b) Le pétale diamétralement opposé est **quatre** pétales plus loin (puisque $8 \div 2 = 4$) :

$$4 \times 45^\circ = 180^\circ$$

C'est donc la rotation d'angle 180° de centre O , autrement dit la **symétrie centrale de centre O** — et cette fois le sens est inutile.

Contrôle. 180° , c'est bien la moitié d'un tour complet : cela correspond à parcourir la moitié des pétales.

Réponse. a) 45° — b) 180° , la symétrie centrale de centre O .

Correction de l'exercice 4 - Combien de pétales ?

On revient au motif de départ après avoir parcouru un tour complet, soit 360° . Le nombre de motifs n vérifie donc :

$$n \times 24^\circ = 360^\circ$$

- $n = \frac{360}{24}$
- $n = 15$

La rosace comporte **15 motifs**.

Contrôle. $15 \times 24 = 360$ ✓ Le compte tombe juste, ce qui était nécessaire : si la division n'avait pas donné un nombre entier, les motifs ne se refermeraient pas et se chevaucheraient.

Question à se poser. Un angle de 50° ne conviendrait pas, puisque $360 \div 50 = 7,2$ n'est pas entier.

Réponse. 15 motifs.

Correction de l'exercice 5 - L'aire d'une frise

a) L'aire d'un rectangle vaut :

$$A = L \times \ell = 3 \times 2 = 6$$

Chaque motif a une aire de 6 cm^2 .

b) Une translation **conserve les aires** : les 14 motifs ont donc tous la même aire.

$$- A_{\text{totale}} = 14 \times 6 = 84$$

L'aire totale de la frise est de 84 cm^2 .

La justification qui compte. Ce n'est pas évident a priori que tous les motifs aient la même aire : c'est la conservation des aires par translation qui le garantit, et c'est elle qu'il faut citer.

Réponse. a) 6 cm^2 — b) 84 cm^2 .

Correction de l'exercice 6 - Le pavage de carreaux

Il faut d'abord convertir toutes les longueurs dans la même unité. En centimètres :

$$- \text{largeur du mur} : 3 \text{ m} = 300 \text{ cm} ;$$

$$- \text{hauteur du mur} : 2,4 \text{ m} = 240 \text{ cm}.$$

a) **Par rangée horizontale**, chaque carreau occupe 20 cm :

$$- 300 \div 20 = 15 \text{ carreaux}.$$

Nombre de rangées :

$$- 240 \div 20 = 12 \text{ rangées}.$$

b) Le nombre total de carreaux est le produit :

$$- 15 \times 12 = 180$$

Il faut **180 carreaux**.

Contrôle par les aires. Aire du mur : $300 \times 240 = 72\,000 \text{ cm}^2$. Aire d'un carreau : $20 \times 20 = 400 \text{ cm}^2$. Et $72\,000 \div 400 = 180 \checkmark$

Réponse. a) 15 par rangée et 12 rangées — b) 180 carreaux.

Correction de l'exercice 7 - Le motif tournant

a) Les 6 triangles se partagent le tour complet :

$$\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

On passe d'un triangle au suivant par une rotation de centre O et d'angle 60° .

b) Une rotation **conserve les aires** : les six triangles ont donc tous la même aire, $7,5 \text{ cm}^2$. Comme ils ne se chevauchent pas :

$$- A_{\text{totale}} = 6 \times 7,5 = 45$$

L'aire totale du logo est de 45 cm^2 .

Hypothèse importante. Le calcul suppose que les triangles ne se recouvrent pas. S'ils se chevauchaient, l'aire du logo serait **inférieure** à la somme des aires.

Réponse. a) 60° — b) 45 cm^2 .

Correction de l'exercice 8 - Frise en diagonale

a) On ajoute 2 à l'abscisse et 1 à l'ordonnée à chaque étape :

$$- P_2(0 + 2 ; 1 + 1) = P_2(2 ; 2) ;$$

$$- P_3(2 + 2 ; 2 + 1) = P_3(4 ; 3) ;$$

$$- P_4(4 + 2 ; 3 + 1) = P_4(6 ; 4).$$

b) Le n -ième point de repère s'obtient par $n - 1$ translations :

$$x_n = 0 + (n - 1) \times 2 \quad y_n = 1 + (n - 1) \times 1$$

Test sur l'abscisse. $14 = (n - 1) \times 2$ donne $n - 1 = 7$, donc $n = 8$.

Vérification sur l'ordonnée. Pour $n = 8$: $y_8 = 1 + 7 = 8$ ✓

Les deux coordonnées concordent : le point $(14 ; 8)$ est bien le **huitième** point de repère de la frise.

Le contrôle indispensable. Il faut vérifier les **deux** coordonnées : le point $(14 ; 9)$, par exemple, aurait la bonne abscisse mais pas la bonne ordonnée, et n'appartiendrait pas à la frise.

Réponse. a) $P_2(2 ; 2)$, $P_3(4 ; 3)$, $P_4(6 ; 4)$ — b) oui, c'est P_8 .

Correction de l'exercice 9 – Une frise et deux transformations

a) Le motif 3 se déduit du motif 1 par une **translation**, qui conserve l'orientation : les motifs 1 et 3 sont donc orientés de la **même façon**, tous deux « à l'endroit ».

b) Par le même raisonnement appliqué un cran plus loin : le motif 4 est au motif 2 ce que le motif 3 est au motif 1, c'est-à-dire son image par la même translation. Les motifs 2 et 4 sont donc eux aussi orientés de la même façon, tous deux « retournés ».

Conclusion sur la frise. Les motifs de rang impair sont à l'endroit, ceux de rang pair sont retournés : l'alternance se répète à l'infini.

Le principe général. Une symétrie axiale inverse l'orientation ; en appliquer deux la rétablit. C'est pourquoi deux motifs de même parité se ressemblent toujours.

En notant a le glissement d'un motif au suivant de même orientation, les motifs « à l'endroit » se déduisent du premier par

$$x_{2k+1} = x_1 + k \times a$$

Réponse. a) oui (translation) — b) oui également.

Correction de l'exercice 10 – Le carrelage tournant

a) Chaque rotation fait avancer de 90° . Pour un tour complet :

$$\frac{360^\circ}{90^\circ} = 4$$

Il faut **4 carrés**.

b) L'aire d'un carré de côté 10 cm vaut :

$$A = c^2 = 10^2 = 100$$

soit 100 cm^2 . Une rotation conserve les aires, donc les quatre carrés ont chacun 100 cm^2 :

$$— 4 \times 100 = 400$$

L'aire totale couverte est de 400 cm^2 .

Remarque. Ces quatre carrés forment eux-mêmes un motif carré plus grand, de côté 20 cm : on vérifie que $20^2 = 400 \text{ cm}^2$ ✓

Réponse. a) 4 carrés — b) 400 cm^2 .

Correction de l'exercice 11 – Décrire précisément

Non, la description est **insuffisante**. Une rotation se décrit par **trois** éléments :

- son **centre** ;
- son **angle** ;
- son **sens** (sauf pour un demi-tour, où il est inutile).

Sans ces trois informations, on ne peut pas construire le motif suivant : le même angle autour de deux centres différents donne deux frises différentes.

Pour une translation, il faut **deux** informations : le déplacement horizontal et le déplacement vertical — ou, ce qui revient au même, un point et son image (« la translation qui transforme A en B »).

En résumé.

Transformation	Ce qu'il faut donner
translation	le glissement (deux nombres), ou un point et son image
rotation	centre, angle, sens
symétrie centrale	le centre
symétrie axiale	l'axe

Réponse. Non : il faut le centre, l'angle et le sens ; pour une translation, le glissement (deux nombres).

Correction de l'exercice 12 - Le ruban décoratif

On travaille en centimètres : le ruban mesure 180 cm.

Le premier motif est à 12 cm du bord gauche, le dernier à 12 cm du bord droit, donc à $180 - 12 = 168$ cm du bord gauche.

La distance entre le premier et le dernier motif vaut donc :

$$- 168 - 12 = 156 \text{ cm.}$$

Chaque translation fait avancer de 12 cm. Le nombre d'intervalles est :

$$\frac{156}{12} = 13$$

Il y a 13 intervalles, donc :

$$- 13 + 1 = 14 \text{ motifs.}$$

Le ruban comporte **14 motifs**.

Le piège, encore. 13 est le nombre de sauts entre motifs ; il y a toujours un motif de plus que d'intervalles.

Réponse. 14 motifs.

Correction de l'exercice 13 - Deux frises superposées

Les motifs de la première frise sont aux abscisses multiples de 6 : 0, 6, 12, 18, 24, ...

Ceux de la seconde sont aux multiples de 8 : 0, 8, 16, 24, ...

On cherche le premier nombre, après 0, qui appartient aux deux listes — c'est-à-dire le plus petit multiple commun à 6 et 8.

$$- \text{multiples de 6 : } 6, 12, 18, 24 ;$$

$$- \text{multiples de 8 : } 8, 16, 24.$$

Les motifs coïncident pour la première fois à l'abscisse 24.

Vérification. $24 = 4 \times 6$: c'est le 5^e motif de la première frise. Et $24 = 3 \times 8$: c'est le 4^e

motif de la seconde.

Remarque. Ils coïncideront ensuite tous les 24 carreaux : en 48, 72, et ainsi de suite.

Réponse. À l'abscisse 24.

Correction de l'exercice 14 - Le pavage triangulaire

a) L'aire d'un triangle vaut :

$$A = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

Chaque triangle a une aire de 6 cm².

b) Translations et demi-tours conservent les aires : **tous** les triangles du pavage ont la même aire, 6 cm². Comme le pavage ne laisse ni trou ni chevauchement, les aires s'ajoutent :

$$\text{— nombre de triangles} = \frac{216}{6} = 36$$

Il faut **36 triangles**.

Pourquoi les demi-tours sont nécessaires. Avec des translations seules, on ne pourrait pas emboîter les triangles pointe contre pointe : les demi-tours permettent de combler les espaces entre deux triangles voisins. C'est le principe du pavage triangulaire classique.

Réponse. a) 6 cm² — b) 36 triangles.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : la fresque murale

On convertit en centimètres : la fresque mesure 400 cm sur 250 cm.

a) **Par ligne :**

$$\text{— } 400 \div 25 = 16 \text{ motifs.}$$

Nombre de lignes :

$$\text{— } 250 \div 25 = 10 \text{ lignes.}$$

b) Le total est le produit :

$$\text{— } 16 \times 10 = 160$$

La fresque compte **160 motifs**.

c) Les 12 motifs de la rosace se partagent le tour complet :

$$\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

L'angle entre deux motifs consécutifs est de 30°.

Contrôle de b) par les aires. Aire de la fresque : $400 \times 250 = 100\,000$ cm². Aire d'un motif : $25^2 = 625$ cm². Et $100\,000 \div 625 = 160$ ✓

Bilan du chapitre. Une frise et un pavage se construisent par **translations** ; une rosace par **rotations** de même centre, d'angle $\frac{360^\circ}{n}$. Dans les deux cas, tous les motifs sont superposables : même aire, même périmètre.

Réponse. a) 16 par ligne et 10 lignes — b) 160 motifs — c) 30°.