

Plaquette 1 - Triangles égaux : reconnaître et justifier

Triangles égaux et semblables — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. Deux triangles sont **égaux** lorsque leurs côtés sont deux à deux de même longueur et leurs angles deux à deux de même mesure. On peut les superposer.

Les trois cas d'égalité. Deux triangles sont égaux si :

- **trois côtés** : leurs trois côtés sont deux à deux de même longueur ;
- **deux côtés et l'angle entre eux** : deux côtés de même longueur et l'angle **compris entre ces deux côtés** de même mesure ;
- **un côté et les deux angles qui le touchent** : un côté de même longueur et les deux angles qui lui sont adjacents de même mesure.

Attention à l'angle « compris ». Deux côtés égaux et un angle égal **qui n'est pas entre eux** ne suffisent pas : les deux triangles peuvent être différents.

L'ordre des lettres. Écrire « les triangles ABC et DEF sont égaux » signifie :

$$AB = DE \quad BC = EF \quad CA = FD$$

et $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$. L'ordre n'est pas décoratif : il **dit** quel sommet correspond à quel sommet.

Conséquence utile. Si deux triangles sont égaux, toutes leurs longueurs et tous leurs angles se déduisent les uns des autres : c'est ce qui permet de calculer une longueur qu'on ne peut pas mesurer.

Somme des angles. Dans tout triangle : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$. C'est souvent ce qui donne le troisième angle.

Correction de l'exercice 1 - Le cas des trois côtés

On compare les côtés deux à deux, dans l'ordre des lettres :

- $AB = DE = 5 \text{ cm}$;
- $BC = EF = 7 \text{ cm}$;
- $CA = FD = 6 \text{ cm}$.

Les trois côtés sont deux à deux de même longueur :

$$AB = DE \quad BC = EF \quad CA = FD$$

D'après le **premier cas d'égalité** (trois côtés), les triangles ABC et DEF sont égaux.

Ce que cela apporte. Sans mesurer un seul angle, on sait déjà que $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$ et $\hat{C} = \hat{F}$.

Réponse. Oui, par le cas des trois côtés : $ABC = DEF$.

Correction de l'exercice 2 - Le cas de l'angle compris

Repérons d'abord la position de l'angle donné.

- Dans GHI , l'angle $\hat{GHI}$ a pour sommet H : il est **compris entre** les côtés $[HG]$ et $[HI]$, justement les deux côtés dont on connaît la longueur.

- Dans JKL , l'angle $\hat{J}KL$ a pour sommet K : il est compris entre $[KJ]$ et $[KL]$, les deux côtés connus.

On compare :

- $GH = JK = 4 \text{ cm}$;
- $HI = KL = 6 \text{ cm}$;
- $\hat{GHI} = \hat{JKL} = 50^\circ$, angles compris entre ces côtés.

Le cas d'égalité s'écrit donc, pour ces deux triangles :

$$GH = JK \quad HI = KL \quad \hat{GHI} = \hat{JKL}$$

D'après le **deuxième cas d'égalité** (deux côtés et l'angle compris entre eux), les triangles GHI et JKL sont égaux.

Le mot qui compte. « Compris entre » : c'est la vérification à faire **avant** de citer ce cas.

Réponse. Oui, cas des deux côtés et de l'angle compris.

Correction de l'exercice 3 - Le cas d'un côté et deux angles

Les deux angles donnés sont ceux dont les sommets sont les extrémités du côté connu :

- dans MNP , le côté $[MN]$ est touché par les angles de sommets M et N : ce sont exactement $\hat{NMP}$ et $\hat{MNP}$;
- dans RST , le côté $[RS]$ est touché par les angles de sommets R et S : ce sont $\hat{SRT}$ et $\hat{RST}$.

On compare :

- $MN = RS = 8 \text{ cm}$;
- $\hat{NMP} = \hat{SRT} = 35^\circ$;
- $\hat{MNP} = \hat{RST} = 70^\circ$.

Soit, en une ligne :

$$MN = RS \quad \hat{NMP} = \hat{SRT} \quad \hat{MNP} = \hat{RST}$$

D'après le **troisième cas d'égalité** (un côté et les deux angles adjacents), les triangles MNP et RST sont égaux.

Bonus. On en déduit le troisième angle de chacun : $180^\circ - 35^\circ - 70^\circ = 75^\circ$.

Réponse. Oui, cas d'un côté et des deux angles adjacents.

Correction de l'exercice 4 - Le piège de l'angle mal placé

Regardons **où se trouve** l'angle donné.

- Dans ABC , l'angle $\hat{BAC}$ a pour sommet A . Les côtés connus sont $[AB]$ et $[BC]$. L'angle est compris entre $[AB]$ et $[AC]$ — or $[AC]$ n'est pas connu : **l'angle n'est pas compris entre les deux côtés connus**.
- Même situation dans DEF .

Le deuxième cas d'égalité exige que l'angle soit **compris entre** les deux côtés de même longueur. Ce n'est pas le cas ici : l'élève **n'a pas raison**, on ne peut rien conclure.

Pourquoi ce n'est pas qu'une question de vocabulaire. Avec ces données, il existe réellement deux triangles différents : l'angle en A étant à l'écart des deux côtés connus, le troisième sommet peut se placer de deux façons.

La règle à retenir. Deux côtés et un angle ne suffisent que si l'angle est **entre** eux.

Réponse. Non : l'angle n'est pas compris entre les deux côtés connus.

Correction de l'exercice 5 – Lire les codages

On compare les trois côtés de ABC et de ADC :

- $AB = AD$: les deux segments portent une seule marque ;
- $BC = DC$: les deux segments portent deux marques ;
- $AC = AC$: c'est **le même segment**, commun aux deux triangles.

Les trois côtés sont deux à deux de même longueur :

$$AB = AD \quad BC = DC \quad AC = AC$$

D'après le premier cas d'égalité, les triangles ABC et ADC sont égaux.

Le côté commun. C'est l'astuce de ce type de figure : le troisième couple de côtés égaux est donné gratuitement, puisque c'est le même segment.

Conséquence. On en déduit par exemple $\widehat{BAC} = \widehat{DAC}$: la droite (AC) est bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$.

Réponse. Oui : $AB = AD$, $BC = DC$ et $[AC]$ commun (trois côtés).

Correction de l'exercice 6 – Compléter la phrase de conclusion

L'ordre des lettres donne la correspondance des sommets :

Triangle ABC	A	B	C
Triangle DEF	D	E	F

Un côté correspond au côté formé par les deux sommets correspondants :

- $AB = DE$ (les sommets A et B correspondent à D et E) ;
- $\widehat{B} = \widehat{E}$;
- $CA = FD$;
- $\widehat{F} = \widehat{C}$.

Erreur fréquente. Écrire $AB = EF$: les lettres sont prises dans l'ordre, A avec D et B avec E , donc $[AB]$ correspond à $[DE]$.

Réponse. $AB = DE$; $\widehat{B} = \widehat{E}$; $CA = FD$; $\widehat{F} = \widehat{C}$.

Correction de l'exercice 7 – Déduire une longueur

Les triangles étant égaux dans l'ordre $ABC \leftrightarrow DEF$, les côtés correspondants ont la même longueur :

$$AB = DE \quad BC = EF \quad CA = FD$$

- de $AB = DE$: $DE = 6,5$ cm ;
- de $BC = EF$: $EF = 4$ cm ;
- de $CA = FD$: $CA = 5,2$ cm.

Rédaction attendue. On ne se contente pas d'annoncer les valeurs : on cite à chaque fois l'égalité de côtés correspondants qui les justifie.

Contrôle. Les trois longueurs 6,5, 4 et 5,2 vérifient l'inégalité triangulaire ($4 + 5,2 = 9,2 > 6,5$) : un tel triangle existe bien.

Réponse. $DE = 6,5$ cm, $EF = 4$ cm, $CA = 5,2$ cm.

Correction de l'exercice 8 - Dédurre un angle

Les angles correspondants sont égaux :

- $\hat{G} = \hat{J} = 48^\circ$;
- $\hat{K} = \hat{H} = 62^\circ$.

Il reste à trouver les troisièmes angles. Dans tout triangle, la somme des angles vaut 180° :

$$\hat{G} + \hat{H} + \hat{I} = 180^\circ$$

- $48 + 62 + \hat{I} = 180$
- $\hat{I} = 180 - 110$
- $\hat{I} = 70^\circ$

Et $\hat{L} = \hat{I} = 70^\circ$.

Bilan. Les deux triangles ont pour angles 48° , 62° et 70° .

Contrôle. $48 + 62 + 70 = 180$ ✓

Réponse. 48° , 62° et 70° dans les deux triangles.

Correction de l'exercice 9 - Deux triangles dans un parallélogramme

Dans un parallélogramme, **les côtés opposés ont la même longueur**. Donc :

- $AB = CD$;
- $BC = DA$.

De plus, le segment $[AC]$ est commun aux deux triangles ABC et CDA :

- $AC = CA$.

Soit les trois égalités du premier cas :

$$AB = CD \quad BC = DA \quad CA = AC$$

D'après le premier cas d'égalité, **les triangles ABC et CDA sont égaux**.

Attention à l'ordre des lettres. On écrit ABC et CDA (et non ABC et ACD) pour que les sommets se correspondent : A avec C , B avec D , C avec A .

Conséquence classique. On en déduit $\hat{ABC} = \hat{CDA}$: dans un parallélogramme, les angles opposés sont égaux.

Réponse. Oui : $AB = CD$, $BC = DA$, $[AC]$ commun — cas des trois côtés.

Correction de l'exercice 10 - Vrai ou faux

a) **Faux.** Deux triangles ayant les mêmes angles sont **semblables** : l'un peut être un agrandissement de l'autre. Un triangle d'angles 60° , 60° , 60° de côté 3 cm et un autre de côté 10 cm ont les mêmes angles sans être égaux.

b) **Vrai.** Des triangles égaux sont superposables : ils ont même base et même hauteur correspondantes, donc même aire.

c) **Vrai**, mais c'est inutile : les trois cas d'égalité montrent que **trois** égalités bien choisies suffisent. Vérifier les six est une perte de temps.

d) **Vrai.** Les trois côtés sont deux à deux de même longueur, donc leurs sommes sont égales.

Ce qu'il faut retenir de a). Égaux $\neq$ semblables : c'est toute la différence entre ce chapitre et le suivant.

Réponse. a) faux — b) vrai — c) vrai mais inutile — d) vrai.

Correction de l'exercice 11 - Choisir le bon cas

a) L'angle $\hat{A}$ est compris entre $[AB]$ et $[AC]$, les deux côtés donnés : c'est le **deuxième cas** (deux côtés et l'angle compris). On conclut : les triangles sont égaux.

b) Le côté $[AB]$ est touché par les angles de sommets A et B , justement les deux angles donnés : c'est le **troisième cas** (un côté et les deux angles adjacents). On conclut.

c) Les côtés donnés sont $[AB]$ et $[BC]$; l'angle compris entre eux est celui de sommet B . Or l'angle donné est celui de sommet C : **on ne peut pas conclure** avec ce seul argument.

d) Les trois côtés sont donnés : c'est le **premier cas**. On conclut.

Méthode. Avant de citer un cas, on dessine mentalement la position de l'angle par rapport aux côtés connus : c'est cela, et rien d'autre, qui décide.

Réponse. a) 2^e cas — b) 3^e cas — c) on ne peut pas conclure — d) 1^{er} cas.

Correction de l'exercice 12 - Mesurer l'inaccessible

Comparons les triangles AOB et DOC .

- O est le milieu de $[AD]$, donc $OA = OD$;
- O est le milieu de $[BC]$, donc $OB = OC$;
- les angles $\hat{AOB}$ et $\hat{DOC}$ sont **opposés par le sommet**, donc de même mesure.

L'angle $\hat{AOB}$ est compris entre $[OA]$ et $[OB]$, et $\hat{DOC}$ entre $[OD]$ et $[OC]$: ce sont bien les angles compris entre les côtés égaux.

D'après le deuxième cas d'égalité, les triangles AOB et DOC sont égaux.

Les côtés correspondants ont donc la même longueur :

- $AB = DC = 24$ m.

La rivière mesure 24 m de large.

À quoi ça sert. C'est exactement ainsi qu'on mesurait autrefois une distance inaccessible : on la reporte de l'autre côté d'un point, là où on peut poser le décamètre.

Réponse. Les triangles AOB et DOC sont égaux, donc $AB = DC = 24$ m.

Correction de l'exercice 13 - Dans un triangle isocèle

Comparons les triangles ABM et ACM :

- le triangle est isocèle en A , donc $AB = AC$;
- M est le milieu de $[BC]$, donc $MB = MC$;
- le côté $[AM]$ est commun aux deux triangles, donc $AM = AM$.

Les trois côtés sont deux à deux de même longueur :

$$AB = AC \quad MB = MC \quad AM = AM$$

D'après le premier cas d'égalité, **les triangles ABM et ACM sont égaux.**

Les angles correspondants sont alors égaux. Le sommet B du premier correspond au sommet C du second :

- $\hat{ABM} = \hat{ACM}$

On vient de démontrer une propriété connue : **dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux.**

Remarque. On démontrerait de la même façon que $\widehat{AMB} = \widehat{AMC}$; comme ces deux angles sont supplémentaires, ils valent 90° : la médiane issue de A est aussi une hauteur.

Réponse. Cas des trois côtés, d'où $\widehat{ABM} = \widehat{ACM}$.

Correction de l'exercice 14 – Repérer un raisonnement incomplet

Les cas d'égalité demandent **trois** égalités, et l'élève n'en donne que deux. Avec un côté et un angle seulement, il existe une infinité de triangles différents : le troisième sommet peut être placé n'importe où sur une demi-droite.

Une troisième donnée suffirait, par exemple :

- $AC = DF$: l'angle $\widehat{A}$ serait alors compris entre les deux côtés connus $[AB]$ et $[AC]$, et on appliquerait le **deuxième cas** ;
- ou bien $\widehat{B} = \widehat{E}$: le côté $[AB]$ serait touché par les deux angles connus, et on appliquerait le **troisième cas**.

Le réflexe à avoir. Compter les égalités : trois, pas deux. Et vérifier qu'elles sont **bien placées** les unes par rapport aux autres.

Réponse. Il manque une troisième égalité : par exemple $AC = DF$ (2^e cas) ou $\widehat{B} = \widehat{E}$ (3^e cas).

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : quatre situations

- a) Les trois côtés sont deux à deux de même longueur : **premier cas**, les triangles sont égaux.
- b) Seuls les angles sont donnés. Les triangles sont **semblables**, mais rien ne fixe leur taille : on **ne peut pas conclure** qu'ils sont égaux.
- c) Le côté $[BC]$ est touché par les angles de sommets B et C , qui sont justement les deux angles donnés : **troisième cas**, les triangles sont égaux.
- d) L'angle $\widehat{A}$ est compris entre $[AB]$ et $[AC]$, les deux côtés donnés : **deuxième cas**, les triangles sont égaux.

Ce que montre b). Trois angles égaux ne suffisent jamais : il faut **au moins une longueur** pour conclure à l'égalité.

Réponse. a) 1^{er} cas — b) impossible de conclure — c) 3^e cas — d) 2^e cas.