

Plaquette 2 – Triangles semblables : reconnaître

Triangles égaux et semblables — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. Deux triangles sont **semblables** lorsque leurs angles sont deux à deux de même mesure.

Le critère pratique. Il suffit de vérifier **deux** couples d'angles égaux : le troisième suit automatiquement, puisque dans tout triangle

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

Conséquence sur les longueurs. Si ABC et DEF sont semblables dans cet ordre, leurs côtés correspondants sont **proportionnels** :

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{FD}{CA} = k$$

Le nombre k est le **rapport de similitude** (ou d'agrandissement-réduction).

Égaux ou semblables ?

	Angles	Côtés	Taille
Triangles égaux	deux à deux égaux	deux à deux égaux	identique
Triangles semblables	deux à deux égaux	proportionnels	quelconque

Deux triangles égaux sont un cas particulier de triangles semblables, avec $k = 1$.

L'ordre des lettres. « ABC et DEF sont semblables » signifie $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$. Si les angles égaux ne se correspondent pas dans cet ordre, il faut **réécrire** le second triangle dans le bon ordre.

Angles utiles pour trouver des égalités. Angles opposés par le sommet, angles alternes-internes ou correspondants entre deux droites parallèles, angle commun à deux triangles.

Correction de l'exercice 1 – Deux angles suffisent

On compare les angles donnés :

— $\hat{A} = \hat{D} = 55^\circ$;

— $\hat{B} = \hat{E} = 80^\circ$.

Deux couples d'angles sont égaux : d'après le critère du cours, les triangles ABC et DEF sont **semblables**.

Les troisièmes angles se déduisent de la somme des angles d'un triangle :

$$\hat{C} = 180^\circ - 55^\circ - 80^\circ$$

— $\hat{C} = 45^\circ$

et de même $\hat{F} = 45^\circ$.

Pourquoi deux suffisent. Si deux angles sont égaux, les troisièmes le sont forcément : ce sont les compléments à 180° de la même somme.

Réponse. Oui, semblables ; $\hat{C} = \hat{F} = 45^\circ$.

Correction de l'exercice 2 – Trouver l'angle manquant d'abord

On calcule les angles manquants.

Dans GHI :

$$\hat{I} = 180^\circ - 30^\circ - 95^\circ = 55^\circ$$

Dans JKL :

$$\hat{J} = 180^\circ - 95^\circ - 55^\circ = 30^\circ$$

Les deux triangles ont donc les mêmes angles : 30° , 95° et 55° . Ils sont **semblables**.

Il reste à écrire la correspondance, angle par angle :

- $\hat{G} = \hat{J} = 30^\circ$;
- $\hat{H} = \hat{K} = 95^\circ$;
- $\hat{I} = \hat{L} = 55^\circ$.

On écrit donc : les triangles GHI et JKL sont semblables, **dans cet ordre**.

Méthode. Quand les angles ne sont pas donnés dans le même ordre, on complète les deux triangles puis on apparie les angles **par leur mesure**, pas par la place de la lettre.

Réponse. Oui : GHI et JKL sont semblables (30° , 95° , 55°).

Correction de l'exercice 3 – Remettre les lettres dans l'ordre

On apparie les angles de même mesure :

Mesure	40°	60°	80°
Triangle MNP	M	N	P
Triangle RST	S	T	R

Le sommet M correspond donc à S , le sommet N à T , et le sommet P à R .

La phrase correcte est : **les triangles MNP et STR sont semblables**.

Pourquoi c'est important. C'est cet ordre qui permettra ensuite d'écrire les bons quotients de longueurs :

$$\frac{ST}{MN} = \frac{TR}{NP} = \frac{RS}{PM}$$

Écrire « MNP et RST » conduirait à comparer des côtés qui ne se correspondent pas, et à un résultat faux.

Réponse. Les triangles MNP et STR sont semblables.

Correction de l'exercice 4 – Semblables mais pas égaux

a) **Non.** Les côtés ne sont pas de même longueur : $3 \neq 6$. Les triangles ne sont pas superposables.

b) On compare les côtés correspondants, du plus petit au plus petit :

- $\frac{6}{3} = 2$;
- $\frac{8}{4} = 2$;
- $\frac{10}{5} = 2$.

Les trois quotients sont égaux à 2 : les côtés sont **proportionnels**. Le triangle DEF est

donc un **agrandissement** de ABC de rapport 2, et les deux triangles sont **semblables**.

Conséquence. Leurs angles sont deux à deux égaux, alors qu'on n'en a mesuré aucun : la proportionnalité des côtés suffit.

Remarque. Le premier triangle est rectangle ($3^2 + 4^2 = 5^2$) : le second l'est donc aussi.

Réponse. a) non — b) oui, rapport 2.

Correction de l'exercice 5 – L'angle commun

On cherche deux couples d'angles égaux.

Premier couple : l'angle commun. L'angle de sommet A est le même pour les deux triangles :

$$— \hat{MAN} = \hat{BAC}.$$

Deuxième couple : les angles correspondants. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles, coupées par la sécante (AB) . Les angles $\hat{AMN}$ et $\hat{ABC}$ sont **correspondants**, donc de même mesure :

$$— \hat{AMN} = \hat{ABC}.$$

Deux couples d'angles sont égaux : les triangles AMN et ABC sont **semblables**, dans cet ordre (A avec A , M avec B , N avec C).

À quoi ça sert. On en déduit la proportionnalité des côtés :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

C'est exactement le théorème de Thalès, qu'on retrouvera en Troisième.

Réponse. Angle commun en A + angles correspondants : AMN et ABC sont semblables.

Correction de l'exercice 6 – Les angles opposés par le sommet

On cherche deux couples d'angles égaux.

Premier couple : angles opposés par le sommet. Les angles $\hat{AOC}$ et $\hat{BOD}$ sont opposés par le sommet O , donc de même mesure :

$$— \hat{AOC} = \hat{BOD}.$$

Deuxième couple : angles alternes-internes. Les droites (AC) et (BD) sont parallèles, coupées par la sécante (AB) . Les angles $\hat{OAC}$ et $\hat{OBD}$ sont alternes-internes, donc de même mesure :

$$— \hat{OAC} = \hat{OBD}.$$

Deux couples d'angles sont égaux : les triangles OAC et OBD sont **semblables**, dans cet ordre.

Configuration à connaître. On l'appelle le « papillon » : elle revient dans tous les exercices où deux segments parallèles sont reliés par deux droites sécantes.

Réponse. Angles opposés par le sommet + alternes-internes : OAC et OBD sont semblables.

Correction de l'exercice 7 – Deux triangles rectangles

On complète les angles de chaque triangle.

Dans ABC , rectangle en A :

$$\hat{C} = 180^\circ - 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$$

Dans DEF , rectangle en D :

$$\hat{E} = 180^\circ - 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$$

Les deux triangles ont donc les mêmes angles : 90° , 35° et 55° . Ils sont **semblables**.

Correspondance, angle par angle :

- $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$;
- $\hat{B} = \hat{E} = 35^\circ$;
- $\hat{C} = \hat{F} = 55^\circ$.

Les triangles ABC et DEF sont semblables, dans cet ordre.

Cas particulier utile. Deux triangles rectangles qui ont un angle aigu de même mesure sont toujours semblables : l'angle droit fournit déjà un couple, l'angle aigu le second.

Réponse. Oui : ABC et DEF semblables (90° , 35° , 55°).

Correction de l'exercice 8 - Reconnaître par les côtés

On compare les côtés correspondants, dans l'ordre des lettres :

- $\frac{DE}{AB} = \frac{10}{4} = 2,5$;
- $\frac{EF}{BC} = \frac{15}{6} = 2,5$;
- $\frac{FD}{CA} = \frac{12,5}{5} = 2,5$.

Les trois quotients sont égaux : les côtés sont proportionnels, de rapport $k = 2,5$.

Les triangles ABC et DEF sont donc **semblables**, et DEF est un agrandissement de ABC de rapport 2,5.

Attention à l'ordre de comparaison. On divise chaque côté du second par le côté **correspondant** du premier. Comparer DE à BC donnerait des quotients différents et une conclusion fausse.

Réponse. Oui, semblables de rapport 2,5.

Correction de l'exercice 9 - Un contre-exemple

On compare les côtés correspondants, du plus petit au plus petit :

- $\frac{6}{3} = 2$;
- $\frac{10}{5} = 2$;
- $\frac{12}{7} \approx 1,71$.

Les deux premiers quotients valent 2, mais le troisième non : les côtés **ne sont pas proportionnels**.

Les triangles ne sont donc **pas semblables**.

Pour qu'ils le soient, le troisième côté du second triangle devrait mesurer $7 \times 2 = 14$ cm.

La règle. Il faut que les **trois** quotients soient égaux. Deux sur trois ne suffisent pas.

Réponse. Non : $\frac{12}{7} \approx 1,71 \neq 2$.

Correction de l'exercice 10 - Vrai ou faux

- a) **Vrai.** Deux triangles égaux ont leurs angles deux à deux égaux : ils sont semblables, avec un rapport $k = 1$.
- b) **Faux.** Un triangle de côtés 3-4-5 et un triangle de côtés 6-8-10 sont semblables sans être égaux.
- c) **Vrai.** Dans un triangle équilatéral, les trois angles mesurent 60° . Deux triangles équilatéraux ont donc les mêmes angles, quelle que soit leur taille.
- d) **Faux.** Ils ont bien un angle égal (l'angle droit), mais il en faut **deux**. Un triangle rectangle d'angles 90° - 30° - 60° et un autre d'angles 90° - 45° - 45° ne sont pas semblables.
- Ce que montre d).** Un seul couple d'angles égaux ne suffit jamais.

Réponse. a) vrai — b) faux — c) vrai — d) faux.

Correction de l'exercice 11 - Semblables, égaux, ou ni l'un ni l'autre

- a) Les trois côtés sont deux à deux de même longueur : les triangles sont **égaux** (et donc aussi semblables, avec $k = 1$).
- b) On compare : $\frac{10}{5} = 2$, $\frac{24}{12} = 2$, $\frac{26}{13} = 2$. Les côtés sont proportionnels de rapport 2 : les triangles sont **semblables sans être égaux**.
- c) $\frac{5}{5} = 1$, $\frac{12}{12} = 1$, mais $\frac{14}{13} \approx 1,08$: les quotients ne sont pas égaux, et les côtés ne sont pas non plus de même longueur. **Ni l'un ni l'autre.**
- d) Les angles sont deux à deux égaux : les triangles sont **semblables**. Mais rien ne dit qu'ils ont la même taille : on ne peut pas affirmer qu'ils sont égaux.

Résumé. Longueurs identiques $\Rightarrow$ égaux. Longueurs proportionnelles ou angles égaux $\Rightarrow$ semblables. Rien de tout cela $\Rightarrow$ ni l'un ni l'autre.

Réponse. a) égaux — b) semblables — c) ni l'un ni l'autre — d) semblables.

Correction de l'exercice 12 - Deux triangles emboîtés

On cherche deux couples d'angles égaux.

Premier couple : les angles droits.

- $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (le triangle ABC est rectangle en A) ;
- $\widehat{BHA} = 90^\circ$ ($[AH]$ est une hauteur).

Donc $\widehat{BAC} = \widehat{BHA}$.

Deuxième couple : l'angle commun. L'angle de sommet B est le même dans les deux triangles, puisque H appartient au segment $[BC]$:

- $\widehat{ABC} = \widehat{HBA}$.

Deux couples d'angles sont égaux : les triangles ABC et HBA sont **semblables**, dans cet ordre (A avec H , B avec B , C avec A).

Attention à l'ordre. Il est dicté par les angles égaux : le sommet portant l'angle droit (A) correspond à celui qui porte l'angle droit dans l'autre triangle (H), et le sommet de l'angle commun (B) correspond à lui-même.

Réponse. Deux angles droits + angle commun en B : ABC et HBA sont semblables.

Correction de l'exercice 13 – Chercher le troisième angle

On calcule les angles manquants.

Dans ABC :

$$\hat{C} = 180^\circ - 72^\circ - 45^\circ = 63^\circ$$

Les angles de ABC sont donc 72° , 45° et 63° .

Dans DEF :

$$\hat{F} = 180^\circ - 63^\circ - 72^\circ = 45^\circ$$

Les angles de DEF sont 63° , 72° et 45° .

Les deux listes d'angles sont les mêmes : 45° , 63° et 72° . Les triangles sont **semblables**.

La correspondance s'obtient en appariant les mesures :

$$- \hat{A} = \hat{E} = 72^\circ ; \hat{B} = \hat{F} = 45^\circ ; \hat{C} = \hat{D} = 63^\circ.$$

On écrit : les triangles ABC et EFD sont semblables.

Le piège de l'exercice. Les angles sont donnés dans un ordre trompeur : sans le calcul du troisième angle, on ne voit pas la correspondance.

Réponse. Oui : ABC et EFD sont semblables.

Correction de l'exercice 14 – Justifier une non-similitude

On calcule les troisièmes angles.

Dans ABC :

$$\hat{C} = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ$$

Les angles sont 50° , 60° , 70° .

Dans DEF :

$$\hat{F} = 180^\circ - 50^\circ - 65^\circ = 65^\circ$$

Les angles sont 50° , 65° , 65° .

Les deux triangles ont bien un angle de 50° en commun, mais les deux autres diffèrent : $\{60^\circ; 70^\circ\}$ d'un côté, $\{65^\circ; 65^\circ\}$ de l'autre.

Les triangles **ne sont pas semblables**.

Ce qu'il fallait éviter. Conclure trop vite sur le seul angle de 50° : un couple d'angles égaux ne suffit jamais.

Réponse. Non : 50° - 60° - 70° contre 50° - 65° - 65° .

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : quatre couples

a) Troisième angle du premier : $180 - 25 - 95 = 60^\circ$. Troisième du second : $180 - 95 - 60 = 25^\circ$. Les deux ont 25° , 60° et 95° : ils sont **semblables**.

b) On compare : $\frac{8}{6} \approx 1,33$, $\frac{12}{9} \approx 1,33$, $\frac{16}{12} \approx 1,33$. Plus précisément, les trois quotients valent $\frac{4}{3}$: les côtés sont proportionnels, les triangles sont **semblables**.

c) Premier : $180 - 90 - 40 = 50^\circ$, donc 90° , 40° , 50° . Second : $180 - 90 - 50 = 40^\circ$, donc 90° , 50° , 40° . Mêmes angles : ils sont **semblables**.

d) $\frac{8}{4} = 2$, $\frac{14}{7} = 2$, mais $\frac{17}{9} \approx 1,89$. Les quotients ne sont pas égaux : les triangles ne sont

pas semblables.

Bilan de méthode. Angles donnés $\Rightarrow$ compléter à 180° et comparer les listes. Côtés donnés $\Rightarrow$ calculer les trois quotients et vérifier qu'ils sont égaux.

Réponse. a) semblables — b) semblables — c) semblables — d) non.