

Plaquette 3 – Rapport d'agrandissement et calcul de longueurs

Triangles égaux et semblables — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le rapport. Si les triangles ABC et DEF sont semblables dans cet ordre, il existe un nombre $k > 0$ tel que

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{FD}{CA} = k$$

Calculer k . On divise une longueur du **second** triangle par la longueur **correspondante** du premier. Un seul couple connu suffit.

Utiliser k .

Ce qu'on cherche	Opération	
une longueur du grand triangle	on multiplie celle du petit par k	
une longueur du petit triangle	on divise celle du grand par k	

Interpréter k .

- $k > 1$: agrandissement ;
- $k = 1$: les triangles sont égaux ;
- $0 < k < 1$: réduction.

Effet sur les autres grandeurs.

Grandeur	Multipliée par
les longueurs (côtés, périmètre, hauteurs)	k
les aires	k^2
les angles	rien : ils sont conservés

Produit en croix. De $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$) on tire $a \times d = b \times c$.

Contrôle final. Si $k > 1$, chaque longueur trouvée dans le grand triangle doit être supérieure à celle du petit.

Correction de l'exercice 1 – Trouver le rapport

Les côtés $[AB]$ et $[DE]$ se correspondent (les sommets A et B correspondent à D et E). Le rapport s'obtient en divisant la longueur du second triangle par celle du premier :

$$k = \frac{DE}{AB}$$

- $k = \frac{10}{4}$
- $k = 2,5$

Comme $k = 2,5 > 1$, il s'agit d'un **agrandissement** : le triangle DEF est 2,5 fois plus grand que ABC .

Sens de lecture. Si l'on avait cherché le rapport permettant de passer de DEF à ABC , on aurait trouvé $\frac{4}{10} = 0,4$, c'est-à-dire une réduction. Les deux rapports sont inverses l'un de

l'autre.

Réponse. $k = 2,5$: c'est un agrandissement.

Correction de l'exercice 2 - Une longueur dans le grand triangle

Le côté $[EF]$ correspond au côté $[BC]$ (les sommets B et C correspondent à E et F). La définition du rapport donne :

$$\frac{EF}{BC} = k$$

- $\frac{EF}{5,2} = 3$
- $EF = 5,2 \times 3$
- $EF = 15,6$

La longueur EF vaut 15,6 cm.

Contrôle. $k = 3 > 1$, donc DEF est plus grand : $15,6 > 5,2$ ✓

Réponse. $EF = 15,6$ cm.

Correction de l'exercice 3 - Une longueur dans le petit triangle

Le côté $[KL]$ correspond à $[HI]$. Par définition du rapport :

$$\frac{KL}{HI} = k$$

- $\frac{18}{HI} = 2,5$
- Produit en croix : $HI \times 2,5 = 18$
- $HI = \frac{18}{2,5}$
- $HI = 7,2$

La longueur HI vaut 7,2 cm.

Le réflexe. On cherche une longueur du **petit** triangle : on **divise** par k . Multiplier aurait donné 45 cm, plus grand que la longueur du grand triangle : absurde.

Réponse. $HI = 7,2$ cm.

Correction de l'exercice 4 - Deux calculs à la suite

Étape 1 : le rapport. Les côtés $[AB]$ et $[DE]$ se correspondent :

$$k = \frac{DE}{AB} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Étape 2 : les longueurs manquantes. On multiplie chaque côté de ABC par k .

- $EF = BC \times k = 9 \times \frac{4}{3} = 12$, donc $EF = 12$ cm ;
- $FD = CA \times k = 7,5 \times \frac{4}{3} = 10$, donc $FD = 10$ cm.

Contrôle. On vérifie que les trois quotients sont bien égaux :

$$\frac{8}{6} = \frac{4}{3}, \frac{12}{9} = \frac{4}{3}, \frac{10}{7,5} = \frac{4}{3} \quad \checkmark$$

Conseil de calcul. On garde k sous forme de fraction $\frac{4}{3}$ plutôt que d'écrire 1,333 : les résultats tombent juste.

Réponse. $EF = 12$ cm et $FD = 10$ cm.

Correction de l'exercice 5 - Retrouver le rapport à partir de deux côtés

a) Les côtés $[MN]$ et $[RS]$ se correspondent :

$$k = \frac{RS}{MN} = \frac{4,9}{7} = 0,7$$

Comme $0 < k < 1$, il s'agit d'une **réduction**.

b) Le côté $[ST]$ correspond à $[NP]$:

$$ST = NP \times k$$

$$— ST = 11 \times 0,7$$

$$— ST = 7,7$$

La longueur ST vaut 7,7 cm.

Contrôle. $k < 1$, donc RST est plus petit : $7,7 < 11$ ✓

Réponse. a) $k = 0,7$ (réduction) — b) $ST = 7,7$ cm.

Correction de l'exercice 6 - Le tableau de correspondance

On commence par le tableau de correspondance des côtés :

Triangle ABC	$AB = 5$	$BC = 8$	$CA = 6$
Triangle DEF	$DE = ?$	$EF = 20$	$FD = ?$

Le seul couple complètement connu est $[BC]$ et $[EF]$: c'est lui qui donne le rapport.

$$k = \frac{EF}{BC} = \frac{20}{8} = 2,5$$

On en déduit les deux longueurs manquantes :

$$— DE = AB \times k = 5 \times 2,5 = 12,5, \text{ donc } DE = 12,5 \text{ cm ;}$$

$$— FD = CA \times k = 6 \times 2,5 = 15, \text{ donc } FD = 15 \text{ cm.}$$

Pourquoi le tableau. Il évite l'erreur classique : diviser 20 par 5 (deux côtés qui ne se correspondent pas), ce qui donnerait un rapport de 4 et deux longueurs fausses.

Réponse. $DE = 12,5$ cm et $FD = 15$ cm.

Correction de l'exercice 7 - Périmètre d'un triangle agrandi

a) Le périmètre est la somme des trois côtés :

$$— P_{ABC} = 6 + 8 + 10 = 24, \text{ soit } 24 \text{ cm.}$$

b) **Première façon : calculer les trois côtés.** Chacun est multiplié par $k = 1,5$:

$$— 6 \times 1,5 = 9 ; 8 \times 1,5 = 12 ; 10 \times 1,5 = 15.$$

$$— P_{DEF} = 9 + 12 + 15 = 36, \text{ soit } 36 \text{ cm.}$$

Seconde façon : multiplier directement le périmètre. Le périmètre est une longueur : il est multiplié par k .

$$P_{DEF} = P_{ABC} \times k = 24 \times 1,5 = 36$$

Les deux méthodes donnent 36 cm.

À retenir. Toutes les longueurs d'une figure agrandie sont multipliées par k : les côtés, mais aussi le périmètre, les hauteurs, les médianes, les diagonales.

Réponse. a) 24 cm — b) 36 cm.

Correction de l'exercice 8 - Aires et rapport

a) Dans un agrandissement de rapport k , les longueurs sont multipliées par k , mais **les aires sont multipliées par k^2** :

$$A_{DEF} = A_{ABC} \times k^2$$

— $A_{DEF} = 18 \times 3^2$

— $A_{DEF} = 18 \times 9$

— $A_{DEF} = 162$

L'aire de DEF est de 162 cm^2 .

b) L'élève a multiplié par k au lieu de k^2 : $18 \times 3 = 54$. Or une aire dépend de **deux** dimensions : si la base est multipliée par 3 et la hauteur aussi, l'aire est multipliée par $3 \times 3 = 9$.

Contrôle par le dessin. Un carré de côté 1 agrandi 3 fois devient un carré de côté 3 : on peut y ranger 9 carrés de départ, pas 3.

Réponse. a) 162 cm^2 — b) il a multiplié par k et non par k^2 .

Correction de l'exercice 9 - Le rapport n'est pas donné

Les triangles ABC et ADE sont semblables dans cet ordre : le sommet A correspond à A , B à D et C à E .

Étape 1 : le rapport. Les côtés $[AB]$ et $[AD]$ se correspondent :

$$k = \frac{AD}{AB} = \frac{6}{4} = 1,5$$

Étape 2 : la longueur cherchée. Le côté $[DE]$ correspond à $[BC]$:

$$DE = BC \times k$$

— $DE = 5 \times 1,5$

— $DE = 7,5$

La longueur DE vaut $7,5 \text{ cm}$.

Attention à la lecture de la figure. $AD = 6 \text{ cm}$ est mesuré **depuis** A , et non depuis B : la longueur BD vaut $6 - 4 = 2 \text{ cm}$ et n'intervient pas dans le rapport.

Réponse. $DE = 7,5 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 10 - Réduction sur une photocopieuse

a) Réduire à 80%, c'est multiplier chaque longueur par $\frac{80}{100}$:

— $k = 0,8$

Comme $0 < k < 1$, c'est bien une réduction.

b) On multiplie chaque côté par 0,8 :

— $12 \times 0,8 = 9,6 \text{ cm}$;

— $15 \times 0,8 = 12 \text{ cm}$;

— $18 \times 0,8 = 14,4 \text{ cm}$.

La copie a des côtés de $9,6 \text{ cm}$, 12 cm et $14,4 \text{ cm}$.

c) Les aires sont multipliées par k^2 :

$$A' = A \times k^2 = 88 \times 0,8^2$$

- $0,8^2 = 0,64$
- $A' = 88 \times 0,64 = 56,32$

L'aire de la copie est de 56,3 cm² environ.

Remarque utile. Une réduction à 80% ne réduit pas l'aire de 20% mais de 36% : c'est ce qui surprend quand on photocopie.

Réponse. a) $k = 0,8$ — b) 9,6 ; 12 ; 14,4 cm — c) environ 56,3 cm².

Correction de l'exercice 11 - Deux inconnues

Étape 1 : le rapport, à partir du seul couple entièrement connu :

$$k = \frac{DE}{AB} = \frac{13,5}{9} = 1,5$$

Étape 2 : BC. Le côté $[EF]$ correspond à $[BC]$, et il appartient au **grand** triangle : on divise.

$$BC = \frac{EF}{k} = \frac{21}{1,5} = 14$$

Donc $BC = 14$ cm.

Étape 3 : FD. Le côté $[CA]$ appartient au petit triangle : on multiplie.

$$FD = CA \times k = 10 \times 1,5 = 15$$

Donc $FD = 15$ cm.

Contrôle. Le triangle ABC mesure 9, 14, 10 et le triangle DEF mesure 13,5, 21, 15. Les trois quotients valent bien 1,5 ✓

Réponse. $BC = 14$ cm et $FD = 15$ cm.

Correction de l'exercice 12 - La maquette

a) La maquette est une réduction de rapport $\frac{1}{50}$: pour revenir au réel, on **multiplie par** 50.

- $12 \times 50 = 600$ cm, soit 6 m ;
- $16 \times 50 = 800$ cm, soit 8 m ;
- $20 \times 50 = 1000$ cm, soit 10 m.

La voile réelle a des côtés de 6 m, 8 m et 10 m.

b) Les aires sont multipliées par le carré du rapport, soit $50^2 = 2500$:

$$A_{\text{réelle}} = 96 \times 2500 = 240\,000$$

soit 240 000 cm². On convertit : 1 m² = 10 000 cm², donc

$$240\,000 \div 10\,000 = 24$$

L'aire réelle est de 24 m².

Contrôle. La voile réelle est un triangle rectangle ($6^2 + 8^2 = 10^2$) : son aire vaut $\frac{6 \times 8}{2} = 24$ m² ✓

Réponse. a) 6 m, 8 m, 10 m — b) 24 m².

Correction de l'exercice 13 - Retrouver le rapport à partir des aires

Les aires sont multipliées par k^2 :

$$A_{\text{grand}} = A_{\text{petit}} \times k^2$$

- $108 = 12 \times k^2$
- $k^2 = \frac{108}{12}$
- $k^2 = 9$
- $k = \sqrt{9} = 3$ (le rapport est positif)

Le rapport d'agrandissement vaut 3 : les longueurs du grand triangle sont **trois** fois celles du petit.

Piège. On pourrait croire que le rapport est $\frac{108}{12} = 9$: c'est le rapport des **aires**, pas celui des longueurs. Pour passer des aires aux longueurs, on prend la racine carrée.

Réponse. $k = 3$.

Correction de l'exercice 14 - Hauteur d'un arbre

Pourquoi les triangles sont semblables. Le bâton et l'arbre sont tous deux verticaux, le sol est horizontal : les deux triangles ont un angle droit. De plus, les rayons du soleil arrivent avec la même inclinaison au même instant : les angles entre les rayons et le sol sont égaux.

Deux couples d'angles égaux : les triangles sont **semblables**.

Le rapport. On le calcule avec les deux ombres, qui se correspondent :

$$k = \frac{6,3}{0,9} = 7$$

La hauteur de l'arbre. Les hauteurs se correspondent aussi :

- $h = 1,2 \times 7$
- $h = 8,4$

L'arbre mesure 8,4 m de haut.

La méthode de Thalès. C'est la technique employée depuis l'Antiquité pour mesurer une hauteur inaccessible : un bâton, son ombre, et une règle de proportionnalité.

Réponse. L'arbre mesure 8,4 m.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : quatre calculs

a) Le rapport est le quotient du côté du second par celui du premier :

$$k = \frac{DE}{AB} = \frac{15}{5} = 3$$

b) On cherche un côté du **grand** triangle (ici $k < 1$, donc en fait le plus petit) : on multiplie.

$$EF = BC \times k = 12 \times 0,6 = 7,2$$

soit 7,2 cm.

c) On cherche un côté du **premier** triangle : on divise.

$$CA = \frac{FD}{k} = \frac{26}{4} = 6,5$$

soit 6,5 cm.

d) Les aires sont multipliées par k^2 :

$$A_{DEF} = 20 \times 2,5^2 = 20 \times 6,25 = 125$$

soit 125 cm^2 .

Règle unique. Du premier vers le second, on multiplie par k ; du second vers le premier, on divise par k ; pour les aires, on remplace k par k^2 .

Réponse. a) $k = 3$ — b) $EF = 7,2 \text{ cm}$ — c) $CA = 6,5 \text{ cm}$ — d) 125 cm^2 .