

Plaquette 4 – Angles et côtés correspondants : bien les appairer

Triangles égaux et semblables — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

La règle d'or. « Les triangles ABC et DEF sont semblables » signifie, dans cet ordre :

$$\hat{A} = \hat{D} \quad \hat{B} = \hat{E} \quad \hat{C} = \hat{F}$$

et pour les côtés :

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{FD}{CA}$$

Comment trouver le bon ordre. On apparie les sommets par la **mesure des angles**, jamais par la place de la lettre dans le nom du triangle.

Côté correspondant à un angle. Dans un triangle, à chaque angle correspond le côté **opposé** : le plus grand angle est opposé au plus grand côté, le plus petit au plus petit. C'est un moyen sûr d'apparier les côtés quand seuls les angles sont donnés.

Deux repères pour vérifier un appariement.

Contrôle	Ce qu'il doit donner	
ordre croissant des côtés	le même dans les deux triangles	
plus grand angle	opposé au plus grand côté, dans les deux	
les trois quotients de côtés	tous égaux	

Angles égaux fréquents dans une figure.

- angles **opposés par le sommet** : égaux ;
- angles **correspondants** ou **alternes-internes** entre deux parallèles : égaux ;
- **angle commun** à deux triangles emboîtés : égal à lui-même.

Somme des angles : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ dans tout triangle.

Correction de l'exercice 1 – Écrire les six égalités

L'ordre des lettres donne la correspondance : $A \leftrightarrow R$, $B \leftrightarrow S$, $C \leftrightarrow T$.

Les côtés, en prenant les sommets deux par deux :

$$AB = RS \quad BC = ST \quad CA = TR$$

Les angles, sommet par sommet :

$$\hat{A} = \hat{R} \quad \hat{B} = \hat{S} \quad \hat{C} = \hat{T}$$

Le contrôle qui évite tout. Un côté correspond au côté formé par les **deux sommets correspondants** : $[CA]$ est formé de C et A , qui correspondent à T et R , donc à $[TR]$.

Réponse. $AB = RS$, $BC = ST$, $CA = TR$; $\hat{A} = \hat{R}$, $\hat{B} = \hat{S}$, $\hat{C} = \hat{T}$.

Correction de l'exercice 2 – Apparier par les angles

On apparie les sommets par la mesure des angles :

Mesure	35°	100°	45°
Dans ABC	A	B	C
Dans DEF	E	F	D

Le sommet A correspond à E , B à F et C à D .

La phrase correcte est donc : **les triangles ABC et EFD sont semblables.**

Ce que cela change. Les quotients à écrire sont $\frac{EF}{AB} = \frac{FD}{BC} = \frac{DE}{CA}$. Avec l'ordre « ABC et DEF », on aurait comparé $[AB]$ à $[DE]$, deux côtés qui ne se correspondent pas du tout.

Réponse. Les triangles ABC et EFD sont semblables.

Correction de l'exercice 3 – Le côté opposé à un angle

a) Le plus grand côté est $[AC]$ (opposé à l'angle $\hat{B} = 100^\circ$) ; le plus petit est $[BC]$ (opposé à l'angle $\hat{A} = 30^\circ$).

b) Dans un triangle, **le plus grand côté est opposé au plus grand angle**, et le plus petit côté au plus petit angle.

Ici, l'ordre des angles est :

— $\hat{A} = 30^\circ < \hat{C} = 50^\circ < \hat{B} = 100^\circ$.

Les côtés opposés sont respectivement $[BC]$, $[AB]$ et $[AC]$, donc :

— $BC < AB < AC$.

Pourquoi c'est utile ici. Quand on doit apparier les côtés de deux triangles semblables dont on ne connaît que les angles, cette propriété donne l'ordre à respecter.

Réponse. Plus grand : $[AC]$; plus petit : $[BC]$.

Correction de l'exercice 4 – Repérer l'appariement faux

Le côté $[DE]$ est formé des sommets D et E , qui correspondent à A et B : $[DE]$ correspond donc à $[AB]$, et non à $[BC]$.

L'élève a comparé deux côtés qui ne se correspondent pas. Le rapport correct est :

$$k = \frac{DE}{AB} = \frac{12}{4} = 3$$

Le rapport vaut 3, et non 2.

Conséquences de l'erreur. Avec $k = 2$, l'élève aurait trouvé $EF = 12$ cm et $FD = 10$ cm ; les bonnes valeurs sont $EF = 6 \times 3 = 18$ cm et $FD = 5 \times 3 = 15$ cm.

Le contrôle qui l'aurait alerté. Avec $k = 2$, on aurait $\frac{12}{4} = 3 \neq 2$: les trois quotients ne seraient pas égaux.

Réponse. $[DE]$ correspond à $[AB]$: $k = \frac{12}{4} = 3$.

Correction de l'exercice 5 – Deux triangles emboîtés

a) On cherche deux couples d'angles égaux.

— L'angle de sommet A est **commun** aux deux triangles : $\hat{DAE} = \hat{BAC}$.

— Les droites (DE) et (BC) sont parallèles, coupées par la sécante (AB) : les angles $\hat{ADE}$ et $\hat{ABC}$ sont **correspondants**, donc égaux.

Deux couples d'angles égaux : les triangles ADE et ABC sont **semblables**, dans cet ordre

($A \leftrightarrow A, D \leftrightarrow B, E \leftrightarrow C$).

b) Le rapport se calcule avec les côtés correspondants $[AD]$ et $[AB]$:

$$k = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{7,5} = 0,4$$

Le côté $[DE]$ correspond à $[BC]$:

$$DE = BC \times k = 10 \times 0,4 = 4$$

La longueur DE vaut 4 cm.

Contrôle. $k < 1$: le triangle ADE est une réduction de ABC , et $4 < 10$ ✓

Réponse. a) angle commun + angles correspondants — b) $DE = 4$ cm.

Correction de l'exercice 6 - Le papillon

a) On cherche deux couples d'angles égaux.

- Les angles $\hat{AOC}$ et $\hat{BOD}$ sont **opposés par le sommet** O : ils sont égaux.
- Les droites (AC) et (BD) sont parallèles, coupées par la sécante (AB) : les angles $\hat{OAC}$ et $\hat{OBD}$ sont **alternes-internes**, donc égaux.

Les triangles OAC et OBD sont donc **semblables**, dans cet ordre ($O \leftrightarrow O, A \leftrightarrow B, C \leftrightarrow D$).

b) Le rapport se calcule avec les côtés correspondants $[OA]$ et $[OB]$:

$$k = \frac{OB}{OA} = \frac{6}{4} = 1,5$$

Le côté $[BD]$ correspond à $[AC]$:

$$BD = AC \times k = 5 \times 1,5 = 7,5$$

La longueur BD vaut 7,5 cm.

Le point délicat. L'appariement $A \leftrightarrow B$ vient des angles alternes-internes, pas de la position des lettres : c'est lui qui impose de comparer $[OA]$ à $[OB]$.

Réponse. a) opposés par le sommet + alternes-internes — b) $BD = 7,5$ cm.

Correction de l'exercice 7 - Apparié par les longueurs

On range les côtés de chaque triangle du plus petit au plus grand :

- dans ABC : $BC = 6 < AB = 8 < CA = 12$;
- dans DEF : $DE = 9 < FD = 12 < EF = 18$.

Les côtés se correspondent dans cet ordre :

	Petit	Moyen	Grand
ABC	$[BC]$	$[AB]$	$[CA]$
DEF	$[DE]$	$[FD]$	$[EF]$

Contrôle du rapport : $\frac{9}{6} = 1,5, \frac{12}{8} = 1,5, \frac{18}{12} = 1,5$ ✓ Les trois quotients sont égaux.

Reste à identifier les sommets. Le côté $[BC]$ correspond à $[DE]$, donc $\{B, C\} \leftrightarrow \{D, E\}$; le côté $[AB]$ correspond à $[FD]$, donc $\{A, B\} \leftrightarrow \{F, D\}$. La lettre commune aux deux premiers couples est B d'un côté et D de l'autre : donc $B \leftrightarrow D$, puis $C \leftrightarrow E$ et $A \leftrightarrow F$.

Les triangles ABC et FDE sont semblables.

Contrôle final. $\frac{FD}{AB} = \frac{12}{8} = 1,5, \frac{DE}{BC} = \frac{9}{6} = 1,5, \frac{EF}{CA} = \frac{18}{12} = 1,5$ ✓

Réponse. Les triangles ABC et FDE sont semblables, de rapport 1,5.

Correction de l'exercice 8 - Angles et côtés dans un même raisonnement

a) Dans le triangle ABC :

$$\hat{C} = 180^\circ - 40^\circ - 95^\circ = 45^\circ$$

Les angles correspondants étant égaux :

- $\hat{D} = \hat{A} = 40^\circ$;
- $\hat{E} = \hat{B} = 95^\circ$;
- $\hat{F} = \hat{C} = 45^\circ$.

b) Le rapport se calcule avec les côtés correspondants $[AB]$ et $[DE]$:

$$k = \frac{DE}{AB} = \frac{9}{6} = 1,5$$

Le côté $[EF]$ correspond à $[BC]$:

$$EF = BC \times k = 8 \times 1,5 = 12$$

La longueur EF vaut 12 cm.

À noter. Les angles ne sont **pas** multipliés par k : un agrandissement conserve les angles. C'est précisément ce qui fait que la forme est la même.

Réponse. a) $45^\circ, 40^\circ, 95^\circ, 45^\circ$ — b) $EF = 12$ cm.

Correction de l'exercice 9 - Trois triangles

T_1 et T_2 . On compare les côtés rangés dans le même ordre :

$$- \frac{9}{6} = 1,5 ; \frac{12}{8} = 1,5 ; \frac{15}{10} = 1,5.$$

Les trois quotients sont égaux : T_1 et T_2 sont **semblables**, de rapport 1,5.

T_1 et T_3 . On compare :

$$- \frac{6}{6} = 1 ; \frac{8}{8} = 1 ; \text{mais } \frac{12}{10} = 1,2.$$

Les quotients diffèrent : T_1 et T_3 ne sont **pas** semblables.

T_2 et T_3 . Si T_3 était semblable à T_2 , il le serait aussi à T_1 (qui est semblable à T_2). Ce n'est pas le cas : T_2 et T_3 ne sont pas semblables.

Seuls T_1 et T_2 sont semblables.

Remarque. T_1 et T_2 sont rectangles ($6^2 + 8^2 = 10^2$), T_3 ne l'est pas ($36 + 64 = 100 \neq 144$) : la différence était donc visible autrement.

Réponse. Seuls T_1 et T_2 , de rapport 1,5.

Correction de l'exercice 10 - Une correspondance à deviner

a) On a $\hat{A} = \hat{F}$ et $\hat{B} = \hat{D}$. Il reste, par élimination, $\hat{C} = \hat{E}$.

La correspondance des sommets est donc : $A \leftrightarrow F, B \leftrightarrow D, C \leftrightarrow E$.

On écrit : **les triangles ABC et FDE sont semblables.**

b) Les côtés correspondants s'obtiennent en remplaçant chaque sommet par son correspondant :

- $[AB]$ correspond à $[FD]$;
- $[BC]$ correspond à $[DE]$;

— $[CA]$ correspond à $[EF]$.

$$\frac{FD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{EF}{CA}$$

Méthode. Le troisième couple d'angles s'obtient toujours par élimination : inutile de calculer les mesures.

Réponse. a) ABC et FDE — b) $\frac{FD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{EF}{CA}$.

Correction de l'exercice 11 - L'ordre change le résultat

a) Dans l'ordre $ABC \leftrightarrow DEF$, le côté $[DE]$ correspond à $[AB]$:

$$k = \frac{DE}{AB} = \frac{8}{3}$$

Le côté $[EF]$ correspond à $[BC]$:

$$— EF = 4 \times \frac{8}{3} = \frac{32}{3} \approx 10,67, \text{ soit environ } 10,7 \text{ cm.}$$

b) Dans l'ordre $ABC \leftrightarrow EFD$, le sommet A correspond à E , B à F , C à D . Alors $[EF]$ correspond à $[AB]$:

$$k = \frac{EF}{AB}$$

Mais cette fois c'est $[DE]$ qui correspond à $[CA]$:

$$— k = \frac{DE}{CA} = \frac{8}{5} = 1,6$$

$$— EF = AB \times k = 3 \times 1,6 = 4,8, \text{ soit } 4,8 \text{ cm.}$$

Les deux réponses sont très différentes : **l'ordre des lettres n'est pas une formalité**, il change entièrement le calcul.

Conclusion pratique. Avant tout calcul, on établit la correspondance ; ensuite seulement on écrit les quotients.

Réponse. a) $EF \approx 10,7 \text{ cm}$ — b) $EF = 4,8 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 12 - Compléter un tableau

Le seul couple entièrement connu est $[CA]$ et $[FD]$: c'est lui qui donne le rapport.

$$k = \frac{FD}{CA} = \frac{13,5}{9} = 1,5$$

Calcul de DE (côté du second triangle, correspondant à $[AB]$) : on multiplie.

$$— DE = AB \times k = 7 \times 1,5 = 10,5, \text{ soit } 10,5 \text{ cm.}$$

Calcul de BC (côté du premier triangle, correspondant à $[EF]$) : on divise.

$$— BC = \frac{EF}{k} = \frac{16,5}{1,5} = 11, \text{ soit } 11 \text{ cm.}$$

Tableau complété.

Triangle ABC	$AB = 7$	$BC = 11$	$CA = 9$
Triangle DEF	$DE = 10,5$	$EF = 16,5$	$FD = 13,5$

$$\textbf{Contrôle.} \quad \frac{10,5}{7} = 1,5 \quad \checkmark \quad \frac{16,5}{11} = 1,5 \quad \checkmark \quad \frac{13,5}{9} = 1,5 \quad \checkmark$$

Réponse. $BC = 11 \text{ cm}$ et $DE = 10,5 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 13 - Deux triangles rectangles emboîtés

Les triangles ABC et HBA sont semblables dans cet ordre : $A \leftrightarrow H, B \leftrightarrow B, C \leftrightarrow A$.

On en déduit la correspondance des côtés :

- $[AB]$ correspond à $[HB]$;
- $[BC]$ correspond à $[BA]$;
- $[CA]$ correspond à $[AH]$.

Le rapport se calcule avec le couple entièrement connu, $[BC]$ et $[BA]$:

$$k = \frac{BA}{BC} = \frac{6}{10} = 0,6$$

Le côté $[HB]$ correspond à $[AB]$:

$$HB = AB \times k = 6 \times 0,6 = 3,6$$

La longueur HB vaut 3,6 cm.

Le piège. Ici, le sommet B correspond à lui-même mais A correspond à H : il faut lire l'ordre HBA lettre à lettre, sans se laisser guider par l'habitude alphabétique.

Réponse. $HB = 3,6$ cm.

Correction de l'exercice 14 - Vérifier une conclusion

L'élève mélange deux justifications, et aucune n'est complète :

- **par les côtés**, il faudrait les **trois** quotients égaux ; il n'en donne que deux ;
- **par les angles**, il faudrait **deux** couples d'angles égaux ; il n'en donne qu'un.

Sa conclusion n'est donc pas justifiée en l'état.

Deux façons de la compléter :

- ajouter $\frac{FD}{CA} = 2$: les trois côtés seraient proportionnels, et l'égalité d'angles deviendrait inutile ;
- ou ajouter $\hat{B} = \hat{E}$: deux couples d'angles suffiraient, et les quotients deviendraient inutiles.

La règle. On choisit **une** justification et on la mène jusqu'au bout : trois quotients, ou deux angles. Un mélange incomplet des deux ne démontre rien.

Réponse. Non : il faut soit les trois quotients, soit deux couples d'angles.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : quatre appariements

a) $A \leftrightarrow E, B \leftrightarrow D, C \leftrightarrow F$: les triangles ABC et EDF sont semblables.

b) On a $A \leftrightarrow F$ et $C \leftrightarrow D$; par élimination, $B \leftrightarrow E$. Les triangles ABC et FED sont semblables.

c) On range les côtés : dans ABC , $4 < 6 < 8$; dans DEF , $6 < 9 < 12$. Les quotients sont $\frac{6}{4} = 1,5$, $\frac{9}{6} = 1,5$, $\frac{12}{8} = 1,5$ ✓ Le côté de 4 ($[AB]$) correspond à celui de 6 ($[EF]$), celui de 6 ($[BC]$) à celui de 9 ($[FD]$), celui de 8 ($[CA]$) à celui de 12 ($[DE]$). La lettre commune à $[EF]$ et $[FD]$ est F , comme B l'est à $[AB]$ et $[BC]$: donc $B \leftrightarrow F$, puis $A \leftrightarrow E$ et $C \leftrightarrow D$. Les triangles ABC et EFD sont semblables.

d) On a $B \leftrightarrow E$ et $C \leftrightarrow D$; par élimination, $A \leftrightarrow F$. Les triangles ABC et FED sont semblables.

Ce qui revient toujours. On apparie deux sommets, on obtient le troisième par élimination, puis on recopie le second triangle dans l'ordre imposé.

Réponse. a) EDF — b) FED — c) EFD — d) FED .