

Plaquette 5 – Problèmes et bilan du chapitre

Triangles égaux et semblables – Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Triangles égaux. Trois cas d'égalité : trois côtés ; deux côtés et l'angle compris ; un côté et les deux angles adjacents. Conséquence : tous les côtés et tous les angles correspondants sont égaux.

Triangles semblables. Il suffit de **deux** angles égaux. Conséquence : les côtés sont proportionnels,

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{FD}{CA} = k$$

Effets du rapport k .

Grandeur	Devient
longueur	$\times k$
périmètre	$\times k$
aire	$\times k^2$
angle	inchangé

Angles égaux à chercher dans une figure. Angle commun à deux triangles ; angles opposés par le sommet ; angles correspondants ou alternes-internes entre deux parallèles ; deux angles droits.

Aire d'un triangle.

$$A = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

Somme des angles : 180° dans tout triangle.

Contrôles. Les trois quotients doivent être égaux ; l'ordre des côtés (du plus petit au plus grand) doit être le même dans les deux triangles ; une longueur trouvée dans un agrandissement doit être plus grande.

Correction de l'exercice 1 – Égaux ou semblables ?

- On reporte une longueur à **l'identique** : on cherche des triangles **égaux**, et la longueur inaccessible sera égale à celle qu'on mesure.
- Le bâton et l'arbre n'ont pas la même taille, mais les rayons du soleil donnent des angles égaux : triangles **semblables**, avec un rapport à calculer.
- On veut démontrer que deux segments ont la même longueur : triangles **égaux**.
- Un plan est une réduction : triangles **semblables**, de rapport $\frac{1}{200}$.

La règle. Mêmes longueurs $\Rightarrow$ égaux. Même forme, taille différente $\Rightarrow$ semblables.

Réponse. a) égaux — b) semblables — c) égaux — d) semblables.

Correction de l'exercice 2 – La largeur de l'étang

Comparons les triangles AOB et COD .

- $OA = OC$ (construction) ;
- $OB = OD$ (construction) ;
- $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$: ce sont des angles **opposés par le sommet** O .

L'angle $\widehat{AOB}$ est compris entre les côtés $[OA]$ et $[OB]$, et $\widehat{COD}$ entre $[OC]$ et $[OD]$: ce sont bien les angles compris entre les côtés de même longueur.

D'après le **deuxième cas d'égalité** (deux côtés et l'angle compris), les triangles AOB et COD sont égaux.

Les côtés correspondants sont alors de même longueur :

- $AB = CD = 37$ m.

L'étang mesure 37 m de large.

Pourquoi ça marche sur le terrain. On n'a mesuré que des longueurs accessibles : OA , OB pour construire, puis CD . La largeur de l'étang n'a jamais été franchie.

Réponse. Triangles AOB et COD égaux (2^e cas), donc $AB = CD = 37$ m.

Correction de l'exercice 3 - Les diagonales du parallélogramme

Comparons les triangles AOB et COD :

- $OA = OC$ (donnée de l'énoncé) ;
- $OB = OD$ (donnée de l'énoncé) ;
- $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$, angles opposés par le sommet O , et compris entre les côtés précédents.

D'après le deuxième cas d'égalité, **les triangles AOB et COD sont égaux.**

Les côtés correspondants ont donc la même longueur :

- $AB = CD$.

On retrouve une propriété du parallélogramme : ses côtés opposés ont la même longueur.

Remarque sur la méthode. On aurait aussi pu déduire $\widehat{BAO} = \widehat{DCO}$, ce qui prouve que (AB) et (CD) sont parallèles (angles alternes-internes égaux).

Réponse. 2^e cas d'égalité, d'où $AB = CD$.

Correction de l'exercice 4 - Le plan de l'appartement

a) L'échelle $\frac{1}{50}$ signifie que 1 cm sur le plan représente 50 cm en réalité : pour revenir au réel, on multiplie par 50.

- $8 \times 50 = 400$ cm, soit 4 m ;
- $10 \times 50 = 500$ cm, soit 5 m ;
- $12 \times 50 = 600$ cm, soit 6 m.

La pièce mesure 4 m, 5 m et 6 m de côtés.

b) Les aires sont multipliées par le carré du rapport, soit $50^2 = 2500$:

$$A_{\text{réelle}} = 39,7 \times 2500 = 99\,250$$

soit 99 250 cm². Comme 1 m² = 10 000 cm² :

- $99\,250 \div 10\,000 = 9,925$

L'aire réelle est d'environ 9,9 m².

Ordre de grandeur. Une pièce de 4 m sur 5 m environ, coupée en triangle : 10 m², c'est crédible.

Réponse. a) 4 m, 5 m, 6 m — b) environ 9,9 m².

Correction de l'exercice 5 – La hauteur du clocher

Les deux triangles « objet-ombre » ont le même sommet S (le bout commun des ombres).

Pourquoi ils sont semblables.

- L'angle de sommet S est **commun** aux deux triangles.
- La personne et le clocher sont verticaux, le sol horizontal : les deux triangles ont un angle droit.

Deux couples d'angles égaux : les triangles sont **semblables**.

Le rapport, calculé avec les deux ombres :

$$k = \frac{36}{2,4} = 15$$

La hauteur du clocher, en multipliant la hauteur de la personne :

- $h = 1,7 \times 15$
- $h = 25,5$

Le clocher mesure 25,5 m de haut.

Contrôle. L'ombre du clocher est 15 fois plus longue que celle de la personne : sa hauteur doit l'être aussi ✓

Réponse. Le clocher mesure 25,5 m.

Correction de l'exercice 6 – Deux triangles dans une figure

a) Le point M appartient au segment $[AB]$, donc :

- $AB = AM + MB = 4,2 + 2,8 = 7$, soit $AB = 7$ cm.

b) **Similitude.** L'angle de sommet A est commun aux deux triangles. De plus, $(MN) \parallel (BC)$ et la sécante (AB) donnent des angles correspondants égaux : $\hat{AMN} = \hat{ABC}$.

Deux couples d'angles égaux : les triangles AMN et ABC sont **semblables**, dans cet ordre.

Le rapport, avec les côtés correspondants $[AM]$ et $[AB]$:

$$k = \frac{AB}{AM} = \frac{7}{4,2} = \frac{5}{3}$$

Calcul de BC , qui correspond à $[MN]$:

- $BC = MN \times k = 6 \times \frac{5}{3} = 10$

La longueur BC vaut 10 cm.

Le piège. Le rapport se calcule avec $AB = 7$ cm, et non avec $MB = 2,8$ cm : le côté correspondant à $[AM]$ est le côté **entier** $[AB]$.

Réponse. a) $AB = 7$ cm — b) $BC = 10$ cm.

Correction de l'exercice 7 – Aire d'un triangle réduit

a) L'aire d'un triangle vaut :

$$A = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{12 \times 9}{2} = 54$$

L'aire de ABC est de 54 cm².

b) **Première façon : par les dimensions réduites.** La base et la hauteur sont

multipliées par $k = \frac{2}{3}$:

- base : $12 \times \frac{2}{3} = 8$ cm ;
- hauteur : $9 \times \frac{2}{3} = 6$ cm ;
- aire : $\frac{8 \times 6}{2} = 24$ cm².

Seconde façon : par le carré du rapport.

$$A' = A \times k^2 = 54 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 54 \times \frac{4}{9} = 24$$

Les deux méthodes donnent 24 cm².

Ce qu'on vérifie au passage. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$, et non $\frac{2}{3}$: c'est bien le carré du rapport qui agit sur les aires.

Réponse. a) 54 cm² — b) 24 cm².

Correction de l'exercice 8 - Triangle rectangle et hauteur

a) Le triangle ABC est rectangle en A , d'hypoténuse $[BC]$. D'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

- $BC^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$
- $BC = \sqrt{100} = 10$, donc $BC = 10$ cm.

b) La correspondance $ABC \leftrightarrow HBA$ donne : $A \leftrightarrow H$, $B \leftrightarrow B$, $C \leftrightarrow A$. Donc $[AB]$ correspond à $[HB]$, $[BC]$ à $[BA]$ et $[CA]$ à $[AH]$.

Le rapport, avec le couple entièrement connu $[BC]$ et $[BA]$:

$$k = \frac{BA}{BC} = \frac{8}{10} = 0,8$$

Calcul de HB , qui correspond à $[AB]$:

- $HB = AB \times k = 8 \times 0,8 = 6,4$, soit 6,4 cm.

Calcul de HA , qui correspond à $[CA]$:

- $HA = CA \times k = 6 \times 0,8 = 4,8$, soit 4,8 cm.

Contrôle par l'aire. L'aire du triangle vaut $\frac{8 \times 6}{2} = 24$ cm² ; avec la base $[BC]$ et la hauteur $[AH]$, elle vaut $\frac{10 \times 4,8}{2} = 24$ cm² ✓

Réponse. a) $BC = 10$ cm — b) $HB = 6,4$ cm et $HA = 4,8$ cm.

Correction de l'exercice 9 - Le drapeau et son modèle réduit

a) Le plus grand côté passe de 75 cm à 25 cm :

$$k = \frac{25}{75} = \frac{1}{3}$$

Comme $0 < k < 1$, c'est bien une réduction.

b) On multiplie les deux autres côtés par $\frac{1}{3}$:

- $45 \times \frac{1}{3} = 15$ cm ;

$$- 60 \times \frac{1}{3} = 20 \text{ cm.}$$

Le modèle réduit a des côtés de 15 cm, 20 cm et 25 cm.

c) Les aires sont multipliées par k^2 :

$$A' = 1350 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1350 \times \frac{1}{9} = 150$$

Il faut 150 cm² de tissu.

Contrôle. Le grand triangle est rectangle ($45^2 + 60^2 = 2025 + 3600 = 5625 = 75^2$), donc son aire vaut $\frac{45 \times 60}{2} = 1350 \text{ cm}^2$ ✓ Et celle du petit : $\frac{15 \times 20}{2} = 150 \text{ cm}^2$ ✓

Réponse. a) $k = \frac{1}{3}$ — b) 15, 20 et 25 cm — c) 150 cm².

Correction de l'exercice 10 - Démontrer une égalité de longueurs

Comparons les triangles AMD et BNA .

Notons c le côté du carré.

— $AM = \frac{c}{2}$ (M est le milieu de $[AB]$) et $BN = \frac{c}{2}$ (N est le milieu de $[BC]$), donc $AM = BN$;

— $AD = c$ et $BA = c$, donc $AD = BA$;

— $\widehat{MAD} = 90^\circ$ et $\widehat{NBA} = 90^\circ$: ce sont deux angles du carré, donc $\widehat{MAD} = \widehat{NBA}$.

L'angle $\widehat{MAD}$ est compris entre $[AM]$ et $[AD]$, et $\widehat{NBA}$ entre $[BN]$ et $[BA]$: ce sont bien les angles compris entre les côtés égaux.

D'après le **deuxième cas d'égalité**, les triangles AMD et BNA sont égaux.

Les côtés correspondants ont donc la même longueur. Le côté $[DM]$ (formé de D et M , qui correspondent à A et N) correspond à $[AN]$:

— $DM = AN$.

Remarque. On démontrerait de même que (DM) et (AN) sont perpendiculaires : c'est un exercice classique de fin de chapitre.

Réponse. 2^e cas d'égalité, d'où $DM = AN$.

Correction de l'exercice 11 - Comparer deux photographies

a) On compare les quotients des dimensions correspondantes :

$$- \frac{24}{10} = 2,4 ;$$

$$- \frac{36}{15} = 2,4.$$

Les deux quotients sont égaux : les rectangles ont bien la **même forme**, le second est un agrandissement du premier.

b) Le rapport d'agrandissement est $k = 2,4$.

c) Les aires sont multipliées par k^2 :

$$k^2 = 2,4^2 = 5,76$$

L'aire est multipliée par 5,76.

Contrôle. Aire de départ : $10 \times 15 = 150 \text{ cm}^2$. Aire d'arrivée : $24 \times 36 = 864 \text{ cm}^2$. Et $150 \times 5,76 = 864$ ✓

Réponse. a) oui (2,4 dans les deux cas) — b) $k = 2,4$ — c) $\times 5,76$.

Correction de l'exercice 12 – Repérer les triangles utiles

a) On cherche deux couples d'angles égaux.

— L'angle de sommet A est **commun** aux triangles AMN et ACB : $\widehat{MAN} = \widehat{CAB}$.

— L'énoncé donne $\widehat{AMN} = \widehat{ACB}$.

Deux couples d'angles égaux : les triangles AMN et ACB sont **semblables**, dans cet ordre ($A \leftrightarrow A, M \leftrightarrow C, N \leftrightarrow B$).

b) La correspondance donne : $[AM]$ correspond à $[AC]$, et $[AN]$ à $[AB]$.

Le rapport, avec le couple entièrement connu :

$$k = \frac{AC}{AM} = \frac{8}{3}$$

Calcul de AB , qui correspond à $[AN]$:

$$— AB = AN \times k = 4,5 \times \frac{8}{3} = 12$$

La longueur AB vaut 12 cm.

Le piège de la figure. Ici M correspond à C et non à B : c'est l'égalité d'angles de l'énoncé qui l'impose, pas la position des points sur le dessin.

Réponse. a) angle commun + angles égaux donnés — b) $AB = 12$ cm.

Correction de l'exercice 13 – Un raisonnement à compléter

On dispose de deux côtés égaux : $[AB]$ et $[DE]$, $[BC]$ et $[EF]$. Il manque une troisième donnée.

Première possibilité : le troisième côté. Si $CA = FD$, les trois côtés sont deux à deux de même longueur : on conclut par le **premier cas d'égalité** (trois côtés).

Deuxième possibilité : l'angle compris. Les côtés $[AB]$ et $[BC]$ ont le sommet B en commun ; l'angle compris entre eux est $\widehat{ABC}$. De même, l'angle compris entre $[DE]$ et $[EF]$ est $\widehat{DEF}$. Si $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$, on conclut par le **deuxième cas d'égalité**.

Ce qui ne marcherait pas. Donner $\widehat{A} = \widehat{D}$: cet angle n'est pas compris entre les deux côtés connus, et aucun cas d'égalité ne s'applique.

Réponse. $CA = FD$ (1^{er} cas) ou $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ (2^e cas).

Correction de l'exercice 14 – Le triangle dans le triangle

a) Les aires sont multipliées par k^2 :

$$A' = 72 \times 0,5^2 = 72 \times 0,25 = 18$$

L'aire du triangle réduit est de 18 cm².

b) On compare :

$$— \frac{18}{72} = \frac{1}{4}$$

Le triangle réduit occupe le **quart** de l'aire de ABC , alors que ses longueurs n'ont été divisées que par 2.

c) Avec $k = 0,25$:

$$A'' = 72 \times 0,25^2 = 72 \times 0,0625 = 4,5$$

L'aire serait de 4,5 cm².

Ce qu'il faut retenir. Diviser les longueurs par 2 divise l'aire par 4 ; les diviser par 4 divise l'aire par 16. L'effet sur les aires est toujours plus fort qu'on ne l'imagine.

Réponse. a) 18 cm^2 — b) le quart — c) $4,5 \text{ cm}^2$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : quatre questions de bilan

a) Ils ne sont pas égaux ($6 \neq 9$). On compare les quotients : $\frac{9}{6} = 1,5$, $\frac{12}{8} = 1,5$, $\frac{15}{10} = 1,5$. Les côtés sont proportionnels : ils sont **semblables**, de rapport 1,5.

b) Le périmètre est une longueur : il est multiplié par k .

$$P_{\text{grand}} = 17 \times 4 = 68$$

soit 68 cm.

c) Les aires sont dans le rapport k^2 :

$$— k^2 = \frac{100}{25} = 4$$

$$— k = \sqrt{4} = 2$$

Le rapport des longueurs est 2.

d) **Non.** Ils sont semblables, mais rien ne fixe leur taille : sans au moins une longueur, on ne peut pas conclure à l'égalité.

Bilan du chapitre. Mêmes longueurs $\Rightarrow$ égaux. Mêmes angles $\Rightarrow$ semblables. Longueurs $\times k$, périmètre $\times k$, aires $\times k^2$, angles inchangés.

Réponse. a) semblables de rapport 1,5 — b) 68 cm — c) $k = 2$ — d) non.