Plaquette 4 – Simulations aléatoires et statistiques

Algorithmique et Python — Seconde

Exercices

Méthode

On programme le hasard : lancers de dés, tirages dans une urne, marches aléatoires, estimation de probabilités. On calcule ensuite les indicateurs statistiques d'une série simulée, et l'on compare systématiquement le résultat obtenu à la valeur **théorique**.

Exercice 1 – Simuler un dé

Écrire un programme qui simule n lancers d'un dé et renvoie la fréquence du 6. Quelle valeur attendre pour $n = 6000$?

Exercice 2 – Somme de deux dés

Écrire une fonction qui estime la probabilité que la somme de deux dés vaille 7, et donner la valeur théorique.

Exercice 3 – Tirage dans une urne

Une urne contient 7 boules rouges et 3 vertes. Écrire une fonction estimant la probabilité de tirer deux rouges **avec** remise, et donner la valeur théorique.

Exercice 4 – Estimer π par Monte-Carlo

Écrire un programme estimant π en tirant des points au hasard dans un carré, et expliquer la formule utilisée.

Exercice 5 – Marche aléatoire

Un pion part de 0 et se déplace de $+1$ ou -1 avec la même probabilité. Écrire un programme simulant 100 pas et affichant la position finale. Quelle position moyenne attendre ?

Exercice 6 – Pile ou face : plus longue série

Écrire un programme qui simule 50 lancers d'une pièce et renvoie la longueur de la plus longue série de piles consécutifs.

Exercice 7 – Indicateurs d'une simulation

Écrire un programme qui simule 1000 lancers de deux dés et calcule, **sans stocker les résultats**, la moyenne des sommes obtenues ainsi que la plus petite et la plus grande somme. Quelles valeurs attendre ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Réunion de deux événements

On lance un dé équilibré. On note A l'événement « le résultat est pair » et B l'événement « le résultat est supérieur ou égal à 5 ». Écrire un programme estimant la probabilité de $A \cup B$, puis calculer sa valeur exacte de deux façons.

Exercice 9 – Attendre deux « face » consécutifs

On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir deux « face » de suite. Écrire une fonction *attente()* qui simule l'expérience et renvoie le nombre de lancers effectués, sans stocker les lancers. Des appels répétés donnent une moyenne de 6,15 sur 100 expériences, 5,909 sur 1 000 et 6,0225 sur 10 000. Quelle conjecture peut-on faire ?

Exercice 10 – Jeu équitable ?

On mise 2 €. On lance deux dés : si la somme dépasse 9, on reçoit 8 €, sinon rien. Écrire un programme estimant le gain moyen, et calculer sa valeur théorique.

Exercice 11 – Estimer une aire

Écrire un programme estimant l'aire de la région du carré $[0\,;1]^2$ vérifiant $y < x^2$, et comparer à la valeur exacte.

Exercice 12 – Comparer deux stratégies

Dans un jeu, la stratégie A gagne avec la probabilité 0,4 et rapporte 10 € ; la stratégie B gagne avec la probabilité 0,7 et rapporte 5 €. Écrire un programme comparant les gains moyens, et conclure théoriquement.

Exercice 13 – Fluctuation d'échantillonnage

Écrire un programme qui réalise 200 échantillons de taille 100 d'une pièce équilibrée, et compte combien de fréquences sortent de $[0{,}4\,;0{,}6]$. Quelle valeur attendre ?

Exercice 14 – Tirage sans remise

Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire deux boules sans remise. Expliquer pourquoi le programme suivant simule correctement ce tirage, puis estimer la probabilité que la somme des deux numéros soit paire.

```
from random import randint

def somme_paire(n):
    c = 0
    for k in range(n):
        a = randint(1, 5)
        b = randint(1, 4)
        if b >= a:
            b = b + 1
        if (a + b) % 2 == 0:
            c = c + 1
    return c / n
```

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Temps d'attente

Écrire un programme qui simule des lancers de dé jusqu'à obtenir un 6, et renvoie le nombre de lancers. Quelle moyenne attendre sur de nombreuses simulations ?

Exercice 16 – Synthèse : simuler un contrôle qualité

Une machine produit 4 % de pièces défectueuses. On prélève des lots de 50 pièces.

a) Écrire une fonction simulant un lot et renvoyant le nombre de défectueuses.

b) Quelle moyenne théorique de défectueuses par lot ?

c) Écrire un programme estimant la probabilité qu'un lot contienne au moins 4 défectueuses.

d) Le contrôle rejette un lot dès 4 défectueuses. Sur 1000 lots, combien de rejets attendre ? Et si le taux passait à 8 % ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).