

Plaquette 4 – Simulations aléatoires et statistiques

Algorithmique et Python — Seconde

Exercices

Méthode

On programme le hasard : lancers de dés, tirages dans une urne, marches aléatoires, estimation de probabilités. On calcule ensuite les indicateurs statistiques d'une série simulée, et l'on compare systématiquement le résultat obtenu à la valeur **théorique**.

Exercice 1 - Simuler un dé

Écrire un programme qui simule n lancers d'un dé et renvoie la fréquence du 6. Quelle valeur attendre pour $n = 6000$?

Exercice 2 - Somme de deux dés

Écrire une fonction qui estime la probabilité que la somme de deux dés vaille 7, et donner la valeur théorique.

Exercice 3 - Tirage dans une urne

Une urne contient 7 boules rouges et 3 vertes. Écrire une fonction estimant la probabilité de tirer deux rouges **avec** remise, et donner la valeur théorique.

Exercice 4 - Estimer π par Monte-Carlo

Écrire un programme estimant π en tirant des points au hasard dans un carré, et expliquer la formule utilisée.

Exercice 5 - Marche aléatoire

Un pion part de 0 et se déplace de +1 ou -1 avec la même probabilité. Écrire un programme simulant 100 pas et affichant la position finale. Quelle position moyenne attendre ?

Exercice 6 - Pile ou face : plus longue série

Écrire un programme qui simule 50 lancers d'une pièce et renvoie la longueur de la plus longue série de piles consécutifs.

Exercice 7 - Indicateurs d'une simulation

Écrire un programme qui simule 1000 lancers de deux dés, stocke les sommes dans une liste, et calcule la moyenne et l'étendue. Quelles valeurs attendre ?

Exercice 8 – Probabilité conditionnelle simulée

Écrire un programme estimant la probabilité qu'un dé donne un résultat supérieur à 4, **sachant** qu'il est pair. Donner la valeur théorique.

Exercice 9 – Anniversaires

Écrire un programme estimant la probabilité que, dans un groupe de 23 personnes, deux au moins partagent le même jour d'anniversaire (sur 365 jours).

Exercice 10 – Jeu équitable ?

On mise 2 €. On lance deux dés : si la somme dépasse 9, on reçoit 8 €, sinon rien. Écrire un programme estimant le gain moyen, et calculer sa valeur théorique.

Exercice 11 – Estimer une aire

Écrire un programme estimant l'aire de la région du carré $[0; 1]^2$ vérifiant $y < x^2$, et comparer à la valeur exacte.

Exercice 12 – Comparer deux stratégies

Dans un jeu, la stratégie A gagne avec la probabilité 0,4 et rapporte 10 € ; la stratégie B gagne avec la probabilité 0,7 et rapporte 5 €. Écrire un programme comparant les gains moyens, et conclure théoriquement.

Exercice 13 – Fluctuation d'échantillonnage

Écrire un programme qui réalise 200 échantillons de taille 100 d'une pièce équilibrée, et compte combien de fréquences sortent de $[0,4; 0,6]$. Quelle valeur attendre ?

Exercice 14 – Tirage sans remise

Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. Écrire un programme tirant deux boules sans remise et estimant la probabilité que leur somme soit paire.

Exercice 15 – Temps d'attente

Écrire un programme qui simule des lancers de dé jusqu'à obtenir un 6, et renvoie le nombre de lancers. Quelle moyenne attendre sur de nombreuses simulations ?

Exercice 16 – Synthèse : simuler un contrôle qualité

Une machine produit 4 % de pièces défectueuses. On prélève des lots de 50 pièces.

- Écrire une fonction simulant un lot et renvoyant le nombre de défectueuses.
- Quelle moyenne théorique de défectueuses par lot ?
- Écrire un programme estimant la probabilité qu'un lot contienne au moins 4 défectueuses.
- Le contrôle rejette un lot dès 4 défectueuses. Sur 1000 lots, combien de rejets attendre ? Et si le taux passait à 8 % ?