Plaquette 1 – Développer, factoriser, résoudre

Calcul littéral et équations — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules et méthodes pour le calcul littéral.

— Distributivité : $k(a+b) = ka + kb$ et $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$.

— Identités remarquables :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

— Factoriser, c'est écrire une somme sous forme de produit : on cherche un **facteur commun**, sinon on reconnaît une identité remarquable.

— Équation du premier degré : on isole l'inconnue en ajoutant ou en multipliant **des deux côtés** du signe =.

— Équation produit : $A \times B = 0$ équivaut à $A = 0$ **ou** $B = 0$.

— Inéquation : multiplier ou diviser par un nombre **négatif change le sens** de l'inégalité.

Correction de l'exercice 1 – Développer et réduire

On applique la distributivité $k(a+b) = ka + kb$, en faisant attention aux signes.

a) $A = 3 \times 2x - 3 \times 5 = 6x - 15$.

b) $B = -2 \times 4 - 2 \times (-x) = -8 + 2x$, soit $B = 2x - 8$.

c) $C = x \times x + x \times 7 - 3x = x^2 + 7x - 3x = x^2 + 4x$.

Piège. En b), le signe $-$ porte sur les deux termes de la parenthèse : $-2 \times (-x) = +2x$.

Réponse. $A = 6x - 15$; $B = 2x - 8$; $C = x^2 + 4x$.

Correction de l'exercice 2 – Produit de deux binômes

On utilise la double distributivité du cours :

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

— $2x \times x = 2x^2$;

— $2x \times (-4) = -8x$;

— $3 \times x = 3x$;

— $3 \times (-4) = -12$.

— On additionne et on réduit les termes en x : $-8x + 3x = -5x$.

$$D = 2x^2 - 5x - 12$$

Réponse. $D = 2x^2 - 5x - 12$.

Correction de l'exercice 3 – Identités remarquables

On reconnaît les trois identités du cours :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

a) Avec $a = x$ et $b = 5$: $(x+5)^2 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Avec $a = 3x$ et $b = 2$: $(3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = 9x^2 - 12x + 4$.

c) C'est la troisième identité : $(x-4)(x+4) = x^2 - 4^2 = x^2 - 16$.

Piège. $(3x)^2 = 9x^2$ et non $3x^2$: le carré porte aussi sur le coefficient.

Réponse. a) $x^2 + 10x + 25$ · b) $9x^2 - 12x + 4$ · c) $x^2 - 16$.

Correction de l'exercice 4 – Factoriser avec un facteur commun

Factoriser, c'est repérer le facteur qui apparaît dans chaque terme, puis l'écrire une seule fois devant une parenthèse.

a) $5x^2 = 5x \times x$ et $15x = 5x \times 3$: le facteur commun est $5x$, donc $E = 5x(x+3)$.

b) Le facteur commun est la parenthèse $(x-1)$, présente dans les deux termes :

$$F = (x-1)[(x+2)+3] = (x-1)(x+5)$$

— On vérifie en développant : $(x-1)(x+5) = x^2 + 5x - x - 5 = x^2 + 4x - 5$, et $F = x^2 + x - 2 + 3x - 3 = x^2 + 4x - 5$. C'est correct.

Réponse. a) $E = 5x(x+3)$ · b) $F = (x-1)(x+5)$.

Correction de l'exercice 5 – Factoriser avec une identité

On lit les identités remarquables **de droite à gauche**.

a) $49 = 7^2$, donc $G = x^2 - 7^2 = (x-7)(x+7)$.

b) $4x^2 = (2x)^2$ et $9 = 3^2$, donc $H = (2x)^2 - 3^2 = (2x-3)(2x+3)$.

c) On reconnaît $a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 3$: en effet $6x = 2 \times x \times 3$ et $9 = 3^2$, donc $K = (x+3)^2$.

Méthode. Pour une somme de trois termes, on vérifie toujours le terme du milieu : c'est lui qui confirme l'identité.

Réponse. a) $(x-7)(x+7)$ · b) $(2x-3)(2x+3)$ · c) $(x+3)^2$.

Correction de l'exercice 6 – Équation du premier degré

Méthode du cours : on regroupe les x d'un côté et les nombres de l'autre, en faisant la même opération des deux côtés.

— On retire $3x$ des deux membres : $5x - 3x - 7 = 11$, soit $2x - 7 = 11$.

— On ajoute 7 des deux côtés : $2x = 18$.

— On divise par 2 : $x = 9$.

— Vérification : $5 \times 9 - 7 = 38$ et $3 \times 9 + 11 = 38$. Les deux membres sont égaux.

Réponse. $S = \{9\}$.

Correction de l'exercice 7 – Équation avec des fractions

On supprime les dénominateurs par un produit en croix (légitime car $3 \neq 0$ et $2 \neq 0$) :

$$\frac{2x-1}{3} = \frac{x+4}{2} \Leftrightarrow 2(2x-1) = 3(x+4)$$

— On développe : $4x - 2 = 3x + 12$.

— On retire $3x$: $x - 2 = 12$.

— On ajoute 2 : $x = 14$.

— Vérification : $\frac{2 \times 14 - 1}{3} = \frac{27}{3} = 9$ et $\frac{14+4}{2} = \frac{18}{2} = 9$.

Réponse. $S = \{14\}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Équation produit

Propriété du cours : un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

— Première équation : $2x - 6 = 0$ donne $x = 3$; $x + 5 = 0$ donne $x = -5$. Donc $S = \{-5\,;3\}$.

— Deuxième équation : on **ne divise pas par** x (on perdrait une solution). On ramène tout d'un côté puis on factorise :

$$x^2 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0$$

— Donc $x = 0$ ou $x - 4 = 0$, c'est-à-dire $x = 0$ ou $x = 4$.

Piège. Diviser par x suppose $x \neq 0$: ici $x = 0$ est justement une solution.

Réponse. $\{-5\,;3\}$ puis $\{0\,;4\}$.

Correction de l'exercice 9 – Inéquation et sens de l'inégalité

— On retire 2 des deux côtés : $-3x \leq 9$.

— On divise par -3 : comme -3 est **négatif**, l'inégalité change de sens :

$$x \geq \frac{9}{-3} = -3$$

— L'ensemble des solutions est donc $[-3\,;+\infty[$.

— Vérification avec $x = 0$: $-3 \times 0 + 2 = 2 \leq 11$, vrai, et 0 appartient bien à l'intervalle trouvé.

Piège. C'est l'erreur la plus fréquente du chapitre : on ne change le sens que lorsqu'on multiplie ou divise par un nombre négatif, jamais lorsqu'on ajoute.

Réponse. $S = [-3\,;+\infty[$.

Correction de l'exercice 10 – Mise en équation : un rectangle

On choisit l'inconnue, on traduit l'énoncé, on résout, on conclut.

— Soit x la largeur en mètres. La longueur vaut alors $x + 7$.

— Formule du périmètre d'un rectangle : $P = 2(\ell + L)$, donc

$$2(x + (x + 7)) = 46$$

— On développe : $2(2x + 7) = 46$, soit $4x + 14 = 46$.

— On retire 14 : $4x = 32$, donc $x = 8$.

— La largeur vaut 8 m et la longueur $8 + 7 = 15$ m.

— Vérification : $2(8 + 15) = 2 \times 23 = 46$ m. Le périmètre est bien celui annoncé.

Réponse. Largeur 8 m, longueur 15 m.

Correction de l'exercice 11 – Équation quotient

On commence par la valeur interdite : le dénominateur ne doit pas s'annuler, donc $x + 2 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -2$.

Un quotient est nul si et seulement si son **numérateur** est nul :

$$\frac{3x - 12}{x + 2} = 0 \Leftrightarrow 3x - 12 = 0 \text{ et } x \neq -2 \Leftrightarrow x = 4$$

La valeur 4 n'est pas interdite, elle convient : $S = \{4\}$.

Vérification : $\frac{12 - 12}{4 + 2} = \frac{0}{6} = 0$. Annuler le dénominateur serait une faute : en $x = -2$, le quotient n'existe pas.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $S = \{4\}$ (avec $x \neq -2$).

Correction de l'exercice 12 – Tableau de signes d'un produit

Chaque facteur est affine. $x - 3$ s'annule en 3 et, son coefficient 1 étant positif, il est négatif avant 3 et positif après. $2x + 4$ s'annule en -2 et, de coefficient $2 > 0$, il est négatif avant -2 et positif après. La règle des signes d'un produit donne :

x	$]-\infty\,;-2[$	-2	$]-2\,;3[$	3	$]3\,;+\infty[$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
produit	$+$	0	$-$	0	$+$

Le produit est strictement négatif entre les racines, qui sont exclues :

$$S =]-2\,;3[$$

Vérification : $x = 0$ donne $(-3) \times 4 = -12 < 0$, et $x = 4$ donne $1 \times 12 = 12 > 0$.

Réponse. Négatif sur $]-2\,;3[$, positif ailleurs (nul en -2 et 3) ; $S =]-2\,;3[$.

Correction de l'exercice 13 – Deux nombres liés

On note x le plus petit nombre ; l'autre, son double, vaut $2x$. Une seule inconnue suffit :

$$x + 2x = 11{,}4 \Leftrightarrow 3x = 11{,}4 \Leftrightarrow x = 3{,}8$$

Les deux nombres sont 3,8 et 7,6.

Vérification : $3{,}8 + 7{,}6 = 11{,}4$ et $7{,}6 = 2 \times 3{,}8$. Quand l'énoncé relie deux grandeurs (« le double de », « de plus que »), on **exprime l'une en fonction de l'autre**.

Réponse. 3,8 et 7,6.

Correction de l'exercice 14 – Mise en inéquation : deux forfaits

On note m le nombre de minutes d'appel dans le mois. Le forfait A coûte $8 + 0{,}10m$ €, le forfait B coûte 20 €. B est moins cher quand

$$20 < 8 + 0{,}10m \Leftrightarrow 12 < 0{,}10m \Leftrightarrow m > 120$$

On a divisé par 0,10, positif : le sens est conservé. Le forfait B devient le moins cher au-delà de 120 minutes par mois, soit 2 heures.

Vérification : pour 120 minutes, A coûte $8 + 12 = 20$ €, autant que B ; pour 150 minutes, A coûte 23 €.

Réponse. Au-delà de 120 minutes par mois.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : démontrer puis résoudre

a) On développe chaque carré avec les identités du cours :

— $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$;
— $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$;
— on soustrait **toute** la seconde expression :

$$M = (x^2 + 6x + 9) - (x^2 - 4x + 4) = x^2 + 6x + 9 - x^2 + 4x - 4 = 10x + 5$$

b) L'équation $(x+3)^2 = (x-2)^2$ s'écrit $M = 0$, c'est-à-dire $10x + 5 = 0$.

— Donc $10x = -5$ et $x = -\dfrac{1}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Vérification : $\left(-\frac{1}{2}+3\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$ et $\left(-\frac{1}{2}-2\right)^2=\left(-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$. Égalité confirmée.

À retenir. Deux carrés sont égaux lorsque les nombres sont égaux **ou** opposés : ici $x+3=-(x-2)$ donne la même solution.

Réponse. a) $M=10x+5$ · b) $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).