Plaquette 2 – Équations du premier degré et mise en équation

Calcul littéral et équations — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Équation du premier degré. Une équation $ax + b = 0$ avec $a \neq 0$ a une **unique** solution :

$$x = -\frac{b}{a}$$

Règles de transformation. On peut, sans changer les solutions :

— ajouter ou retrancher le **même** nombre aux deux membres ;

— multiplier ou diviser les deux membres par un **même nombre non nul**.

Méthode générale.

1. **Développer** s'il y a des parenthèses. 2. **Multiplier** par le dénominateur commun s'il y a des fractions. 3. **Regrouper** les x d'un côté, les nombres de l'autre. 4. **Diviser** par le coefficient de x. 5. **Vérifier** dans l'équation de départ.

Cas particuliers.

Équation obtenue	Solutions
$0x = 0$	**tous** les réels
$0x = 5$	**aucune** solution
$3x = 12$	une seule, $x = 4$

Équation produit. $AB = 0$ équivaut à $A = 0$ **ou** $B = 0$.

Équation quotient. $\frac{A}{B} = 0$ équivaut à $A = 0$ **et** $B \neq 0$.

Mise en équation.

1. **Choisir** l'inconnue et préciser son **unité**. 2. **Traduire** chaque phrase par une égalité. 3. **Résoudre**, puis **revenir à la question** posée. 4. **Vérifier** la vraisemblance (un âge négatif, une longueur nulle : à rejeter).

Correction de l'exercice 1 – Équation simple

On rassemble les termes en x dans un membre et les constantes dans l'autre. En soustrayant $3x$ et en ajoutant 5 aux deux membres :

$$7x - 3x = 11 + 5 \Leftrightarrow 4x = 16 \Leftrightarrow x = 4$$

Le coefficient 4 est non nul : la solution est **unique**.

Vérification : pour $x = 4$, le membre de gauche vaut $7 \times 4 - 5 = 23$ et celui de droite $3 \times 4 + 11 = 23$. Graphiquement, les droites $y = 7x - 5$ et $y = 3x + 11$ se coupent au point $(4\,;23)$. L'erreur classique est d'oublier de changer le signe de -5 en le faisant passer à droite : on obtiendrait $4x = 6$, et la vérification échouerait.

Réponse. $x = 4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Équation avec parenthèses

On développe chaque membre séparément avant de regrouper : $3(2x-1) = 6x-3$ et $5(x+2)-4 = 5x+10-4 = 5x+6$. L'équation devient

$$6x-3 = 5x+6 \Leftrightarrow 6x-5x = 6+3 \Leftrightarrow x = 9$$

Vérification : $3(2\times 9-1) = 3\times 17 = 51$ et $5\times 11-4 = 51$.

Deux pièges à éviter dans le développement : $3(2x-1)$ vaut $6x-3$ et non $6x-1$, car le 3 multiplie **chaque** terme de la parenthèse ; et $5(x+2)$ vaut $5x+10$, pas $5x+2$.

Réponse. $x = 9$.

Correction de l'exercice 3 – Équation avec fractions

Pour supprimer les fractions, on multiplie les deux membres par 12, multiple commun de 3 et 4 ; on n'oublie pas le membre de droite :

$$12\times\frac{x}{3}+12\times\frac{x-1}{4} = 12\times 2 \Leftrightarrow 4x+3(x-1) = 24$$

En développant, $4x+3x-3 = 24$, soit $7x = 27$, donc $x = \frac{27}{7} \approx 3{,}857$.

Vérification : $\frac{27/7}{3} = \frac{9}{7}$ et $\frac{27/7-1}{4} = \frac{20/7}{4} = \frac{5}{7}$; la somme vaut $\frac{14}{7} = 2$. Une solution non entière n'a rien d'anormal : une équation à coefficients entiers n'a pas forcément de solution entière.

Réponse. $x = \frac{27}{7} \approx 3{,}857$.

Correction de l'exercice 4 – Équation sans solution

Première équation. On développe : $2x+6 = 2x+5$. En retirant $2x$ des deux membres, il reste $6 = 5$, qui est faux quel que soit x : l'équation n'a **aucune** solution, $S = \varnothing$. Graphiquement, les droites $y = 2x+6$ et $y = 2x+5$ ont la même pente 2 : elles sont parallèles et distinctes.

Seconde équation. On développe : $3x-3 = 3x-3$. Les deux membres sont identiques, l'égalité est vraie pour tout réel :

$$S = \mathbb{R}$$

Par exemple, $x = 0$ donne $-3 = -3$. Quand les x disparaissent, on regarde l'égalité qui reste : fausse, aucune solution ; vraie, tous les réels. Conclure « $x = 0$ » devant $0x = 0$ serait faux.

Réponse. $S = \varnothing$ pour la première ; $S = \mathbb{R}$ pour la seconde.

Correction de l'exercice 5 – Équation produit

On applique la règle du produit nul : un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

Pour la première équation, $3x-6 = 0$ donne $x = 2$ et $2x+5 = 0$ donne $x = -2{,}5$:

$$S = \{-2{,}5\,;\,2\}$$

Pour la seconde, $x = 0$ ou $x-4 = 0$, donc $S = \{0\,;\,4\}$.

Vérification : en $x = 2$, le premier facteur est nul, $(0)(9) = 0$. Erreur grave à éviter : développer $x(x-4)$ en $x^2-4x = 0$, puis diviser par x ; on perdrait la solution 0. On ne divise jamais par une expression qui peut être nulle.

Réponse. $S = \{-2{,}5\,;\,2\}$ et $S = \{0\,;\,4\}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 6 – Équation quotient

On commence par la condition d'existence : le dénominateur ne doit pas s'annuler, donc $x+1 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -1$.

Un quotient est nul si et seulement si son **numérateur** est nul (et son dénominateur non nul) :

$$\frac{2x-6}{x+1} = 0 \Leftrightarrow 2x-6 = 0 \text{ et } x \neq -1 \Leftrightarrow x = 3$$

La valeur 3 est différente de -1, elle convient : $S = \{3\}$. **Vérification** : $\frac{6-6}{3+1} = \frac{0}{4} = 0$.

L'erreur classique est d'annuler le dénominateur : en $x = -1$, l'expression n'existe même pas. On procède toujours en deux temps, valeurs interdites d'abord, résolution ensuite.

Réponse. $S = \{3\}$ (avec la condition $x \neq -1$).

Correction de l'exercice 7 – Mise en équation : nombres

On note x le nombre cherché et on traduit chaque phrase. « Le double d'un nombre, augmenté de 7 » s'écrit $2x+7$; « le triple de ce nombre, diminué de 2 » s'écrit $3x-2$. D'où l'équation

$$2x+7 = 3x-2 \Leftrightarrow 7+2 = 3x-2x \Leftrightarrow x = 9$$

Vérification : $2\times 9+7 = 25$ et $3\times 9-2 = 25$. Le nombre cherché est 9.

On a lu « le double, augmenté de 7 » comme $2x+7$. La lecture $2(x+7)$ donnerait $x = 16$: en cas d'ambiguïté, une virgule (« le double de x, augmenté de 7 ») ou une phrase qui explicite l'interprétation retenue évite le malentendu.

Réponse. $x = 9$.

Correction de l'exercice 8 – Mise en équation : périmètre

On note ℓ la largeur en centimètres ; la longueur, qui la dépasse de 7 cm, vaut $\ell+7$. Le périmètre d'un rectangle est le double de la somme de ses dimensions :

$$2(\ell+\ell+7) = 46 \Leftrightarrow 4\ell+14 = 46 \Leftrightarrow 4\ell = 32 \Leftrightarrow \ell = 8$$

La largeur vaut 8 cm et la longueur 15 cm.

Vérification : $2(8+15) = 46$ cm et $15-8 = 7$ cm. Autre méthode : la demi-somme des dimensions vaut 23 cm et leur écart 7 cm, donc elles valent $\frac{23-7}{2} = 8$ et $\frac{23+7}{2} = 15$. Un périmètre trop petit, par exemple 10 cm, donnerait une largeur négative : il faut toujours contrôler que la solution a un sens.

Réponse. Largeur 8 cm et longueur 15 cm.

Correction de l'exercice 9 – Mise en équation : achats

On note s le prix d'un stylo en euros ; un cahier coûte alors $s+1{,}20$. Trois cahiers et deux stylos coûtent 11,40 € :

$$3(s+1{,}20)+2s = 11{,}40 \Leftrightarrow 5s+3{,}60 = 11{,}40 \Leftrightarrow 5s = 7{,}80 \Leftrightarrow s = 1{,}56$$

Un stylo coûte 1,56 € et un cahier $1{,}56+1{,}20 = 2{,}76$ €.

Vérification : $3\times 2{,}76+2\times 1{,}56 = 8{,}28+3{,}12 = 11{,}40$ €. Le prix moyen par article, $\frac{11{,}40}{5} = 2{,}28$ €, est bien compris entre les deux prix, et plus proche de celui du cahier, puisqu'on en achète davantage.

Réponse. Stylo 1,56 € et cahier 2,76 €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 10 – Équation avec inconnue au dénominateur

Les dénominateurs sont non nuls puisque $x \neq 2$ et $x \neq -1$. Deux fractions sont égales si et seulement si les « produits en croix » sont égaux :

$$\frac{3}{x-2} = \frac{5}{x+1} \Leftrightarrow 3(x+1) = 5(x-2) \Leftrightarrow 3x + 3 = 5x - 10 \Leftrightarrow 13 = 2x$$

donc $x = 6{,}5$. Cette valeur n’est pas interdite, elle convient : $S = \{6{,}5\}$.

Vérification : $\frac{3}{4{,}5} = \frac{2}{3}$ et $\frac{5}{7{,}5} = \frac{2}{3}$. Sans la condition sur les dénominateurs, le produit en croix ne serait pas justifié : c’est elle qui l’autorise.

Réponse. $x = 6{,}5$.

Correction de l’exercice 11 – Problème de mélange

On note x la masse, en kg, de café à 5 €/kg ; il faut alors $12 - x$ kg de café à 8 €/kg pour obtenir 12 kg. Le mélange doit coûter autant que ses ingrédients, soit $6 \times 12 = 72$ € :

$$5x + 8(12 - x) = 72 \Leftrightarrow 5x + 96 - 8x = 72 \Leftrightarrow -3x = -24 \Leftrightarrow x = 8$$

Il faut 8 kg de café à 5 €/kg et 4 kg de café à 8 €/kg.

Vérification : $8 \times 5 + 4 \times 8 = 40 + 32 = 72$ €. Le prix visé, 6 €, est plus proche de 5 que de 8 : il est logique d’utiliser davantage de café bon marché. Une cible hors de $[5\,;8]$, comme 4 €/kg, serait impossible.

Réponse. 8 kg à 5 €/kg et 4 kg à 8 €/kg.

Correction de l’exercice 12 – Équation avec valeur absolue

$|x - 4|$ est la distance entre x et 4 sur la droite graduée. Les nombres situés à distance 6 de 4 sont $4 - 6 = -2$ et $4 + 6 = 10$:

$$|x - 4| = 6 \Leftrightarrow x - 4 = 6 \text{ ou } x - 4 = -6 \Leftrightarrow x = 10 \text{ ou } x = -2$$

Pour la seconde, $|2x + 1| = 7$ signifie $2x + 1 = 7$ ou $2x + 1 = -7$, soit $x = 3$ ou $x = -4$.

Vérification : $|2 \times 3 + 1| = 7$ et $|2 \times (-4) + 1| = |-7| = 7$. Les solutions de la première sont symétriques par rapport à 4, leur milieu est $\frac{-2 + 10}{2} = 4$. Une équation comme $|x - 4| = -2$ n’aurait aucune solution, une distance étant positive.

Réponse. $S = \{-2\,;10\}$ et $S = \{-4\,;3\}$.

Correction de l’exercice 13 – Problème de deux mobiles

On note t la durée, en heures, jusqu’à la rencontre. Pendant ce temps, la première voiture parcourt $90t$ km et la seconde $60t$ km ; comme elles roulent l’une vers l’autre, ces distances s’additionnent pour couvrir les 300 km :

$$90t + 60t = 300 \Leftrightarrow 150t = 300 \Leftrightarrow t = 2$$

Elles se croisent au bout de 2 h, à $90 \times 2 = 180$ km de A, donc à 120 km de B.

Vérification : $60 \times 2 = 120$ km et $180 + 120 = 300$ km. Le nombre 150 km/h est la **vitesse de rapprochement** : pour deux mobiles qui vont l’un vers l’autre, on additionne les vitesses. S’ils allaient dans le même sens, on les soustrairait.

Réponse. Au bout de 2 h, à 180 km de A (vitesse de rapprochement 150 km/h).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 14 – Équation à paramètre

On regroupe les termes en x : $mx - 2x = m - 3$, soit $(m-2)x = m-3$. Avant de diviser par $m-2$, on distingue le cas où ce nombre est nul.

— Si $m \neq 2$, on peut diviser :

$$x = \frac{m-3}{m-2}$$

— Si $m = 2$, l'équation devient $0x = -1$, ce qui est impossible : aucune solution.

Vérification pour $m = 4$: la formule donne $x = \frac{1}{2}$, et l'équation $4x + 3 = 2x + 4$ donne bien $2x = 1$. Pour $m = 2$, on compare les droites $y = 2x + 3$ et $y = 2x + 2$: parallèles et distinctes, elles ne se coupent pas. On ne divise jamais par un paramètre sans examiner le cas où il s'annule.

Réponse. $x = \frac{m-3}{m-2}$ si $m \neq 2$; aucune solution si $m = 2$.

Correction de l'exercice 15 – Problème d'aire

On note c le côté du carré en centimètres. Le rectangle obtenu mesure $c + 3$ sur $c - 2$, et son aire dépasse de 4 cm² celle du carré :

$$(c+3)(c-2) = c^2 + 4 \Leftrightarrow c^2 + c - 6 = c^2 + 4 \Leftrightarrow c = 10$$

Les termes en c^2 s'éliminent, ce qui ramène à une équation du premier degré. Le côté vaut 10 cm ; il est bien supérieur à 2, donc la largeur $c - 2$ reste positive.

Vérification : le carré a une aire de 100 cm², le rectangle mesure 13 cm sur 8 cm, d'aire 104 cm², soit 4 cm² de plus.

Réponse. Côté de 10 cm (aire passant de 100 à 104 cm²).

Correction de l'exercice 16 – Somme et différence

On note x le plus grand nombre. Leur différence vaut 7, donc le plus petit vaut $x - 7$. La somme s'écrit

$$x + (x-7) = 25 \Leftrightarrow 2x - 7 = 25 \Leftrightarrow 2x = 32 \Leftrightarrow x = 16$$

Le plus petit vaut $16 - 7 = 9$. Les deux nombres sont 16 et 9.

Vérification : $16 + 9 = 25$ et $16 - 9 = 7$. **La méthode** : deux grandeurs liées par une information (« la différence vaut 7 ») s'écrivent avec **une seule** inconnue. Plus généralement, deux nombres de somme S et de différence D valent $\frac{S+D}{2}$ et $\frac{S-D}{2}$.

Réponse. 16 et 9.

Correction de l'exercice 17 – Synthèse : problème complet

a) Le prix total est partagé entre les n participants :

$$p(n) = \frac{480}{n} \text{ €}$$

Plus il y a de participants, moins chacun paie.

b) Avec $n - 4$ participants (il faut $n > 4$), le prix devient $\frac{480}{n-4}$, supérieur de 6 € au prix prévu : $\frac{480}{n-4} = \frac{480}{n} + 6$. On multiplie les deux membres par $n(n-4)$, non nul :

$$480n = 480(n-4) + 6n(n-4) \Leftrightarrow 0 = -1\,920 + 6n^2 - 24n$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

En divisant par 6, on obtient $n^2 - 4n - 320 = 0$.

c) En développant, $(n-20)(n+16) = n^2 + 16n - 20n - 320 = n^2 - 4n - 320$. L'équation devient $(n-20)(n+16) = 0$, d'où $n = 20$ ou $n = -16$. Un effectif est positif : $n = 20$ participants. Le prix prévu était $\frac{480}{20} = 24$ € ; après désistement, il passe à $\frac{480}{16} = 30$ €, soit bien 6 € de plus.

Réponse. a) $p(n) = \frac{480}{n}$ · b) voir la correction · c) $n = 20$ participants, 24 € prévus contre 30 € après désistement.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).