Plaquette 4 – Identités remarquables : développer, factoriser, résoudre

Calcul littéral et équations — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les trois identités.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Quelle forme pour quelle question ?

Question	Forme utile
calculer une image	**développée**
résoudre $f(x) = 0$	**factorisée**
trouver un extremum	$k \pm (x-\alpha)^2$, donnée par l'énoncé
étudier un signe	**factorisée**

Reconnaître un carré parfait. L'expression $x^2 + px + q$ est un carré parfait si et seulement si $q = \left(\frac{p}{2}\right)^2$.

— $x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$, car $25 = 5^2$ et $10 = 2 \times 5$.
— $x^2 + 10x + 20$ **n'est pas** un carré parfait.

Différence de carrés cachée. Il faut parfois écrire un nombre comme un carré :

$$x^2 - 5 = \left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right) \qquad 4x^2 - 9 = (2x-3)(2x+3)$$

Une forme qui donne un extremum. Quand l'énoncé fournit une écriture du type $k - (x-\alpha)^2$ ou $k + (x-\alpha)^2$, on la vérifie d'abord en **développant**. Un carré étant positif ou nul :

$$(x-\alpha)^2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad k - (x-\alpha)^2 \leq k$$

avec égalité pour $x = \alpha$: le maximum vaut k (et pour $k + (x-\alpha)^2$, le minimum vaut k).

Contrôle systématique. Tout développement ou factorisation se vérifie par une **valeur numérique** — $x = 1$ est le plus rapide.

Correction de l'exercice 1 – Développer trois expressions

On reconnaît une identité remarquable dans chaque expression.

— $A = (3x-2)^2$ est de la forme $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 3x$ et $b = 2$:
$A = 9x^2 - 2 \times 3x \times 2 + 4 = 9x^2 - 12x + 4$.

— $B = (4x+5)(4x-5)$ est de la forme $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$: $B = 16x^2 - 25$.

— Pour C, plutôt que de développer deux carrés, on utilise $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ avec $a = x+3$ et $b = x-1$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$C = [(x+3)+(x-1)][(x+3)-(x-1)] = (2x+2)\times 4 = 8x+8$$

Contrôle en $x=1$: $C = 4^2 - 0^2 = 16$ et $8+8=16$. Sans parenthèses autour de $(x-1)^2$ développé, on écrirait $x^2+6x+9-x^2-2x+1$, et l'on trouverait faussement $4x+10$.

Réponse. $A = 9x^2-12x+4$ · $B = 16x^2-25$ · $C = 8x+8$.

Correction de l'exercice 2 – Factoriser trois expressions

Pour factoriser, on cherche une identité : les termes extrêmes doivent être des carrés, puis on vérifie le terme central.

— $A = 25x^2-49 = (5x)^2-7^2$ est une différence de carrés : $A = (5x-7)(5x+7)$.

— $B = x^2-14x+49$: $49 = 7^2$ et $14x = 2\times x\times 7$, donc $B = (x-7)^2$.

— $C = 9x^2+30x+25$: $9x^2=(3x)^2$, $25=5^2$ et $30x = 2\times 3x\times 5$, donc

$$C = (3x+5)^2$$

Contrôle en $x=1$: $9+30+25 = 64 = 8^2$. Le terme central est décisif : $9x^2+31x+25$ n'est pas un carré, car $31 \neq 2\times 3\times 5$.

Réponse. $A = (5x-7)(5x+7)$ · $B = (x-7)^2$ · $C = (3x+5)^2$.

Correction de l'exercice 3 – Résoudre par factorisation

Chaque équation se ramène, par une identité, à un produit nul.

— $x^2-16 = (x-4)(x+4) = 0$ donne $x=4$ ou $x=-4$.

— $x^2+8x+16 = (x+4)^2 = 0$ donne $x+4=0$, une seule solution : $x=-4$.

— $4x^2 = 25$ s'écrit $4x^2-25=0$, soit $(2x-5)(2x+5)=0$:

$$S = \left\langle -\frac{5}{2}\,;\frac{5}{2}\right\rangle$$

Vérification : $4\times 2{,}5^2 = 4\times 6{,}25 = 25$. Le piège de la troisième est d'oublier la solution négative : $x^2=a$ avec $a>0$ a **toujours** deux solutions, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Réponse. $\{-4\,;4\}$ · $\{-4\}$ (racine double) · $\left\langle -\frac{5}{2}\,;\frac{5}{2}\right\rangle$.

Correction de l'exercice 4 – Choisir la bonne forme

On développe la forme donnée : $f(x) = x^2-6x+9-4 = x^2-6x+5$. Pour factoriser, on voit une différence de carrés, $(x-3)^2-2^2$:

$$f(x) = [(x-3)-2][(x-3)+2] = (x-5)(x-1)$$

On choisit ensuite la forme adaptée à chaque question. La forme **factorisée** donne les solutions de $f(x)=0$ par la règle du produit nul : $S=\{1\,;5\}$. Elle donne aussi $f(5) = 0\times 4 = 0$ sans calcul.

Contrôle : la forme développée donne $f(5) = 25-30+5 = 0$. La forme de départ montre de plus que $f(x)\geq -4$, puisqu'un carré est positif : le minimum -4 est atteint en $x=3$, milieu des racines 1 et 5.

Réponse. Développée x^2-6x+5, factorisée $(x-5)(x-1)$; $S=\{1\,;5\}$ et $f(5)=0$.

Correction de l'exercice 5 – Calcul astucieux

On écrit chaque nombre à partir d'un nombre rond pour appliquer une identité.

— $103 = 100+3$: $A = 100^2+2\times 100\times 3+3^2 = 10\,000+600+9 = 10\,609$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $98 = 100 - 2$: $B = 100^2 - 2 \times 100 \times 2 + 2^2 = 10\,000 - 400 + 4 = 9\,604$.
— 47 et 53 sont symétriques autour de 50 : $47 = 50 - 3$ et $53 = 50 + 3$, donc

$$C = (50 - 3)(50 + 3) = 50^2 - 3^2 = 2\,500 - 9 = 2\,491$$

Ces calculs sont bien plus rapides que les multiplications posées. Même astuce pour $39 \times 41 = 40^2 - 1 = 1\,599$.

Réponse. $A = 10\,609 \cdot B = 9604 \cdot C = 2491$.

Correction de l'exercice 6 – Factorisation en deux étapes

Dans les deux cas, on cherche d'abord un **facteur commun**, puis une identité dans le facteur restant.

$$A = x^3 - 4x = x\left(x^2 - 4\right) = x(x - 2)(x + 2)$$

$$B = 2x^2 - 18 = 2\left(x^2 - 9\right) = 2(x - 3)(x + 3)$$

Contrôle en $x = 3$: $A = 27 - 12 = 15$ et $3 \times 1 \times 5 = 15$. L'erreur classique est de chercher directement une différence de carrés dans $x^3 - 4x$, alors que x^3 n'est pas un carré. Les racines se lisent ensuite : -2, 0 et 2 pour A ; -3 et 3 pour B.

Réponse. $A = x(x - 2)(x + 2)$ et $B = 2(x - 3)(x + 3)$.

Correction de l'exercice 7 – Une forme qui donne le minimum

a) On développe le membre de droite avec $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:
$(x + 3)^2 - 7 = x^2 + 6x + 9 - 7 = x^2 + 6x + 2$, qui est bien $f(x)$.

b) Un carré est toujours positif ou nul : $(x + 3)^2 \geq 0$, donc

$$f(x) = (x + 3)^2 - 7 \geq -7$$

L'égalité a lieu quand $(x + 3)^2 = 0$, c'est-à-dire pour $x = -3$. Le minimum de f vaut -7, atteint en $x = -3$. **Contrôle** : $f(-3) = 9 - 18 + 2 = -7$.

c) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 7 \Leftrightarrow x + 3 = \sqrt{7}$ ou $x + 3 = -\sqrt{7}$, d'où $x = -3 + \sqrt{7} \approx -0{,}35$ ou $x = -3 - \sqrt{7} \approx -5{,}65$. Les deux solutions sont symétriques par rapport à -3.

Réponse. a) en développant · b) minimum -7 en $x = -3$ · c) $x = -3 - \sqrt{7}$ ou $x = -3 + \sqrt{7}$.

Correction de l'exercice 8 – Démontrer avec les identités

Par développement. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. En soustrayant, les termes a^2 et b^2 s'éliminent : il reste $2ab - (-2ab) = 4ab$.

Par la différence de carrés, avec $A = a + b$ et $B = a - b$:

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = [(a + b) + (a - b)][(a + b) - (a - b)] = 2a \times 2b = 4ab$$

L'égalité est démontrée pour tous réels a et b. **Contrôle** avec $a = 3$, $b = 2$:
$25 - 1 = 24 = 4 \times 6$.

Cette formule permet de multiplier avec des carrés seulement :
$17 \times 23 = \dfrac{40^2 - 6^2}{4} = \dfrac{1\,564}{4} = 391$.

Réponse. $(a + b)^2 - (a - b)^2 = [2a][2b] = 4ab$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 9 – Équation avec identité cachée

On passe tout dans le premier membre : $(2x+1)^2-(x-3)^2=0$. C'est une différence de carrés, avec $a=2x+1$ et $b=x-3$:

$$[(2x+1)+(x-3)][(2x+1)-(x-3)]=(3x-2)(x+4)=0$$

La règle du produit nul donne $x=\dfrac{2}{3}$ ou $x=-4$.

Vérification : pour $x=-4$, $(-7)^2=49$ et $(-7)^2=49$. Deux carrés sont égaux quand les nombres sont égaux **ou opposés** : écrire seulement $2x+1=x-3$ ne donnerait que $x=-4$ et ferait perdre $\dfrac{2}{3}$.

Réponse. $S=\left\{-4\,;\,\frac{2}{3}\right\}$.

Correction de l'exercice 10 – Reconnaître un carré parfait

Une expression x^2+px+q est un carré parfait quand le terme constant est le carré de la moitié de p.

— $x^2+12x+36$: $36=6^2$ et $12=2\times 6$, donc c'est $(x+6)^2$.
— $x^2+12x+30$: il faudrait 36 et non 30 ; ce n'est **pas** un carré parfait, il vaut $(x+6)^2-6$.
— $4x^2-20x+25$: $4x^2=(2x)^2$, $25=5^2$ et $20x=2\times 2x\times 5$, donc

$$4x^2-20x+25=(2x-5)^2$$

Contrôle en $x=1$: $4-20+25=9=(-3)^2$. Un carré parfait de ce type a toujours un terme constant positif : x^2+6x-9 n'en est jamais un.

Réponse. Le premier ($(x+6)^2$) et le troisième ($(2x-5)^2$) ; le deuxième ne l'est pas.

Correction de l'exercice 11 – Factoriser avec un facteur commun caché

Pour A, le facteur commun $(x-1)$ apparaît dans les deux termes ; on le met en facteur, en gardant des crochets pour le reste :

$$A=(x-1)[(x-1)-(3x+2)]=(x-1)(-2x-3)=-(x-1)(2x+3)$$

Le signe moins devant la parenthèse change **les deux** signes : $-(3x+2)=-3x-2$.

Pour B, on écrit $9=3^2$ et l'on factorise la différence de carrés :
$B=(2x+5-3)(2x+5+3)=(2x+2)(2x+8)$. On extrait 2 de chaque facteur :
$B=4(x+1)(x+4)$.

Contrôle en $x=0$: $A=1+2=3$ et $-(-1)\times 3=3$; $B=25-9=16$ et $4\times 1\times 4=16$.

Réponse. $A=-(x-1)(2x+3)$ et $B=4(x+1)(x+4)$.

Correction de l'exercice 12 – Problème géométrique

L'aire passe de x^2 à $(x+4)^2$. L'augmentation se calcule avec l'identité $(a+b)^2$:

$$(x+4)^2-x^2=x^2+8x+16-x^2=8x+16=8(x+2)$$

Elle vaut 80 cm² quand $8x+16=80$, soit $8x=64$ et $x=8$ cm.

Vérification : le carré passe de 64 cm² à $12^2=144$ cm², soit 80 cm² de plus. Géométriquement, l'agrandissement ajoute deux bandes de 4 sur x et un petit carré de 4 sur 4 : $2\times 4x+16$. L'augmentation est une fonction affine de x.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. L'aire augmente de $8x + 16 = 8(x + 2)$ cm² ; elle vaut 80 cm² pour $x = 8$ cm.

Correction de l'exercice 13 – Identité et arithmétique

On reconnaît une identité : $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$, carré de l'entier $n + 1$. Par exemple $n = 3$ donne $16 = 4^2$.

Pour la seconde expression, $n^2 + 2n + 2 = (n + 1)^2 + 1$. Le carré suivant est $(n + 2)^2 = (n + 1)^2 + 2n + 3$, et $2n + 3 > 1$ pour $n \geq 1$. On a donc

$$(n + 1)^2 < n^2 + 2n + 2 < (n + 2)^2$$

Le nombre est strictement compris entre deux carrés d'entiers **consécutifs** : il ne peut pas être lui-même le carré d'un entier.

Contrôle : $n = 3$ donne 17, entre 16 et 25. La restriction est utile : pour $n = -1$, on obtient $1 = 1^2$.

Réponse. $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$; et $n^2 + 2n + 2 = (n + 1)^2 + 1$ est strictement entre deux carrés consécutifs.

Correction de l'exercice 14 – Simplifier une expression

On ne simplifie une fraction que par des **facteurs** communs : il faut donc factoriser numérateur et dénominateur. $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$ et $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$, d'où, pour $x \neq -5$,

$$A = \frac{(x - 5)(x + 5)}{(x + 5)^2} = \frac{x - 5}{x + 5}$$

Contrôle en $x = 0$: $\frac{-25}{25} = -1$ et $\frac{-5}{5} = -1$. Simplifier « $\frac{x^2}{x^2}$ » terme à terme serait une faute : on ne barre jamais des termes d'une somme. L'expression s'annule seulement en $x = 5$.

Réponse. $A = \frac{x - 5}{x + 5}$.

Correction de l'exercice 15 – Somme de deux carrés

a) Un carré est positif ou nul : $x^2 \geq 0$ et $y^2 \geq 0$. Si $x^2 > 0$, la somme serait strictement positive ; donc $x^2 = 0$, et de même $y^2 = 0$. Finalement $x = 0$ et $y = 0$.

b) On développe : $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = x^2 - 4x + y^2 + 6y + 13$.

c) D'après b), l'équation s'écrit

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 0$$

D'après a), appliqué aux nombres $x - 2$ et $y + 3$, cela impose $x - 2 = 0$ et $y + 3 = 0$. L'unique solution est $(2\,;-3)$. **Vérification** : $4 - 8 + 9 - 18 + 13 = 0$. Avec $+14$ au lieu de $+13$, la somme de carrés vaudrait -1 : aucune solution.

Réponse. a) une somme de carrés est nulle si chacun l'est · b) en développant · c) $(x\,;y) = (2\,;-3)$.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : étude complète

a) On développe :
$2(x - 3)^2 - 8 = 2\left(x^2 - 6x + 9\right) - 8 = 2x^2 - 12x + 18 - 8 = 2x^2 - 12x + 10$.

b) On met 2 en facteur, puis on reconnaît une différence de carrés :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$f(x) = 2\Big[(x-3)^2 - 2^2\Big]$, donc

$$f(x) = 2[(x-3)-2][(x-3)+2] = 2(x-5)(x-1)$$

c) La forme factorisée donne $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 5$. Pour le signe, $2 > 0$, et le produit $(x-5)(x-1)$ est négatif quand ses facteurs sont de signes contraires, c'est-à-dire entre 1 et 5 : $f(x) \le 0 \Leftrightarrow x \in [1\,;5]$.

d) Dans la forme de a), $2(x-3)^2 \ge 0$, donc $f(x) \ge -8$, avec égalité pour $x = 3$. Le minimum vaut -8, atteint au milieu des racines. **Contrôle** : $f(3) = 18 - 36 + 10 = -8$. Chaque forme a servi à une question.

Réponse. a) $2(x-3)^2 - 8$ · b) $2(x-5)(x-1)$ · c) $S = \{1\,;5\}$ puis $[1\,;5]$ · d) minimum -8 en $x = 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).