

Plaquette 4 - Identités remarquables :
développer, factoriser, résoudre
Calcul littéral et équations — Seconde
 Corrections détaillées

Boîte à outils

Les trois identités.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Quelle forme pour quelle question ?

Question	Forme utile
calculer une image	développée
résoudre $f(x) = 0$	factorisée
trouver un extremum	canonique
étudier un signe	factorisée

Reconnaître un carré parfait. L'expression $x^2 + px + q$ est un carré parfait si et seulement si $q = \left(\frac{p}{2}\right)^2$.

— $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$ car $25 = 5^2$ et $10 = 2 \times 5$ ✓

— $x^2 + 10x + 20$ **n'est pas** un carré parfait.

Différence de carrés cachée. Il faut parfois écrire un nombre comme un carré :

$$x^2 - 5 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) \quad 4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$$

Forme canonique par complétion du carré :

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

Contrôle systématique. Tout développement ou factorisation se vérifie par une **valeur numérique** — $x = 1$ est le plus rapide.

Correction de l'exercice 1 - Développer trois expressions

— **Pour A :** $(a - b)^2$ avec $a = 3x$ et $b = 2$.

$$A = 9x^2 - 12x + 4$$

— **Contrôle en** $x = 1$: $(1)^2 = 1$, et $9 - 12 + 4 = 1$ ✓

— **Pour B :** $(a + b)(a - b)$ avec $a = 4x$ et $b = 5$.

$$B = 16x^2 - 25$$

— **Contrôle en** $x = 1$: $(9)(-1) = -9$, et $16 - 25 = -9$ ✓

— **Pour C** — méthode rapide par $a^2 - b^2$ avec $a = x + 3$ et $b = x - 1$:

$$C = [(x + 3) + (x - 1)][(x + 3) - (x - 1)] = (2x + 2) \times 4 = 8x + 8$$

- **Contrôle par développement** : $(x^2 + 6x + 9) - (x^2 - 2x + 1) = 8x + 8$ ✓
- **Contrôle en $x = 1$** : $16 - 0 = 16$, et $8 + 8 = 16$ ✓
- **Élégance de la méthode** : reconnaître $a^2 - b^2$ évite deux développements ✓
- **Piège du C** : oublier les parenthèses donnerait $x^2 + 6x + 9 - x^2 - 2x + 1 = 4x + 10$ — et le test en $x = 1$ donnerait 14 au lieu de 16 ✓

Réponse. $A = 9x^2 - 12x + 4$ · $B = 16x^2 - 25$ · $C = 8x + 8$.

Correction de l'exercice 2 - Factoriser trois expressions

- **Pour A** : différence de carrés, $25x^2 = (5x)^2$ et $49 = 7^2$.

$$A = (5x - 7)(5x + 7)$$
- **Contrôle en $x = 1$** : $25 - 49 = -24$, et $(-2)(12) = -24$ ✓
- **Pour B** : carré parfait, car $49 = 7^2$ et $14 = 2 \times 7$.

$$B = (x - 7)^2$$
- **Contrôle en $x = 1$** : $1 - 14 + 49 = 36$, et $(-6)^2 = 36$ ✓
- **Pour C** : carré parfait, car $9x^2 = (3x)^2$, $25 = 5^2$ et $30x = 2 \times 3x \times 5$.

$$C = (3x + 5)^2$$
- **Contrôle en $x = 1$** : $9 + 30 + 25 = 64$, et $8^2 = 64$ ✓
- **Vérification du double produit** : c'est l'étape décisive pour confirmer un carré parfait ✓
- **Contre-exemple** : $9x^2 + 31x + 25$ n'est pas un carré, car $31 \neq 30$ ✓
- **Méthode de reconnaissance** : identifier a et b par les **termes extrêmes**, puis vérifier le terme **central** ✓

Réponse. $A = (5x - 7)(5x + 7)$ · $B = (x - 7)^2$ · $C = (3x + 5)^2$.

Correction de l'exercice 3 - Résoudre par factorisation

- **Première** : $(x - 4)(x + 4) = 0$, donc $S = \{-4; 4\}$ ✓
- **Vérification** : $16 - 16 = 0$ ✓
- **Deuxième** : $(x + 4)^2 = 0$, donc $x = -4$ — solution **unique** (racine double).

$$S = \{-4\}$$
- **Vérification** : $16 - 32 + 16 = 0$ ✓
- **Troisième** : $4x^2 - 25 = 0$, soit $(2x - 5)(2x + 5) = 0$.

$$S = \left\{-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right\}$$
- **Vérification** : $4 \times 6,25 = 25$ ✓
- **Comparaison instructive** : la première a **deux** solutions, la deuxième **une**, la troisième **deux** ✓
- **Raison** : un carré parfait égalé à zéro ne s'annule qu'en **un** point ✓
- **Piège de la troisième** : écrire $x^2 = \frac{25}{4}$ donc $x = \frac{5}{2}$, en oubliant $-\frac{5}{2}$ ✓
- **Règle** : $x^2 = a$ avec $a > 0$ a **toujours deux** solutions ✓
- **Cas sans solution** : $x^2 + 16 = 0$ n'en a aucune, car $x^2 \geq 0$ donne $x^2 + 16 \geq 16$ ✓

Réponse. $\{-4; 4\}$ · $\{-4\}$ (racine double) · $\left\{-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right\}$.

Correction de l'exercice 4 - Choisir la bonne forme

- **Forme développée** : $x^2 - 6x + 9 - 4 = x^2 - 6x + 5$ ✓
- **Forme factorisée** — différence de carrés avec $a = x - 3$ et $b = 2$:

$$f(x) = [(x - 3) - 2][(x - 3) + 2] = (x - 5)(x - 1)$$
- **Contrôle par développement** : $x^2 - x - 5x + 5 = x^2 - 6x + 5$ ✓
- **Résolution de $f(x) = 0$** : la forme **factorisée** donne immédiatement

$$S = \{1; 5\}$$
- **Calcul de $f(5)$** : la forme **factorisée** est ici la plus rapide, $f(5) = 0 \times 4 = 0$ ✓
- **Contrôle par la forme initiale** : $(5 - 3)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$ ✓
- **Contrôle par la forme développée** : $25 - 30 + 5 = 0$ ✓
- **Minimum** : la forme **canonique** $(x - 3)^2 - 4$ montre que le minimum vaut -4 , atteint en $x = 3$ ✓
- **Contrôle** : $f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$ ✓
- **Leçon** : chaque forme répond à une question différente — développée pour une image, factorisée pour les racines, canonique pour l'extremum ✓
- **Symétrie** : les racines 1 et 5 sont symétriques autour de 3 ✓

Réponse. Développée $x^2 - 6x + 5$, factorisée $(x - 5)(x - 1)$; $S = \{1; 5\}$ et $f(5) = 0$.

Correction de l'exercice 5 - Calcul astucieux

- **Pour A** : $103 = 100 + 3$, donc

$$A = 100^2 + 2 \times 100 \times 3 + 9 = 10\,000 + 600 + 9 = 10\,609$$
 - **Vérification** : $103^2 = 10\,609$ ✓
 - **Pour B** : $98 = 100 - 2$, donc

$$B = 10\,000 - 400 + 4 = 9604$$
 - **Vérification** : $98^2 = 9604$ ✓
 - **Pour C** : on remarque que $47 = 50 - 3$ et $53 = 50 + 3$.

$$C = 50^2 - 3^2 = 2500 - 9 = 2491$$
 - **Vérification** : $47 \times 53 = 2491$ ✓
 - **Astuce générale** : pour deux nombres **symétriques** autour d'un nombre rond, on applique $a^2 - b^2$ ✓
 - **Autres exemples** : $39 \times 41 = 1600 - 1 = 1599$ ✓ ; $28 \times 32 = 900 - 4 = 896$ ✓
 - **Carrés proches de 100** : $97^2 = 9409$; $104^2 = 10\,816$ ✓
 - **Vérifications** : $10\,000 - 600 + 9 = 9409$ ✓ et $10\,000 + 800 + 16 = 10\,816$ ✓
 - **Intérêt** : ces calculs sont **plus rapides** mentalement que la multiplication posée ✓
- Réponse.** $A = 10\,609$ · $B = 9604$ · $C = 2491$.

Correction de l'exercice 6 - Factorisation en deux étapes

- **Pour A** : facteur commun x , **puis** identité.

$$A = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$$
- **Contrôle en $x = 3$** : $27 - 12 = 15$, et $3 \times 1 \times 5 = 15$ ✓
- **Pour B** : facteur commun 2, **puis** identité.

$$B = 2(x^2 - 9) = 2(x - 3)(x + 3)$$

- **Contrôle en $x = 1$** : $2 - 18 = -16$, et $2(-2)(4) = -16$ ✓
- **Ordre des réflexes** : **toujours** chercher le facteur commun avant l'identité ✓
- **Erreur classique** : tenter directement $x^3 - 4x$ comme différence de carrés — x^3 n'est pas un carré ✓
- **Autre erreur** : factoriser $2x^2 - 18$ en $(\sqrt{2}x - \sqrt{18})(\sqrt{2}x + \sqrt{18})$ — techniquement correct, mais inutilement compliqué ✓
- **Contrôle de cette variante** : $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, donc l'expression vaut $2(x - 3)(x + 3)$ après simplification ✓
- **Racines de A** : -2 , 0 et 2 ✓
- **Racines de B** : -3 et 3 ✓
- **Nombre de facteurs** : A est de degré 3, donc **trois** facteurs du premier degré ✓

Réponse. $A = x(x - 2)(x + 2)$ et $B = 2(x - 3)(x + 3)$.

Correction de l'exercice 7 - Forme canonique

- **Complétion du carré** : $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$.
- **Report** :

$$f(x) = (x + 3)^2 - 9 + 2 = (x + 3)^2 - 7$$
- **Contrôle par développement** : $x^2 + 6x + 9 - 7 = x^2 + 6x + 2$ ✓
- **Minimum** : le carré est **positif ou nul**, donc $f(x) \geq -7$.
minimum -7 atteint en $x = -3$
- **Contrôle** : $f(-3) = 9 - 18 + 2 = -7$ ✓
- **Contrôles voisins** : $f(-2) = 4 - 12 + 2 = -6$ ✓ et $f(-4) = 16 - 24 + 2 = -6$ ✓ — symétriques et supérieurs
- **Racines** : $(x + 3)^2 = 7$ donne $x = -3 \pm \sqrt{7}$, soit environ $-0,354$ et $-5,646$ ✓
- **Contrôle** : la somme des racines vaut $-6 = -\frac{6}{1}$ ✓ et leur produit $9 - 7 = 2$ ✓
- **Méthode** : on divise le coefficient de x par 2 pour obtenir le terme dans la parenthèse ✓
- **Contrôle du terme constant** : $-\left(\frac{6}{2}\right)^2 + 2 = -9 + 2 = -7$ ✓
- **Forme générale** : $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$ ✓

Réponse. $f(x) = (x + 3)^2 - 7$; minimum -7 en $x = -3$.

Correction de l'exercice 8 - Démontrer avec les identités

Méthode 1 — développement.

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
- **Différence** : $(a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab$ ✓

Méthode 2 — identité $A^2 - B^2$. Avec $A = a + b$ et $B = a - b$:

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = [(a + b) + (a - b)][(a + b) - (a - b)] = 2a \times 2b = 4ab$$

- **Élégance** : aucune identité du carré n'est nécessaire ✓
- **Contrôles** : $a = 3$, $b = 2$ donnent $25 - 1 = 24 = 4 \times 6$ ✓

- $a = 5, b = -1$ donnent $16 - 36 = -20 = 4 \times (-5) \checkmark$
- $a = b = 4$ donnent $64 - 0 = 64 = 4 \times 16 \checkmark$
- **Application au calcul mental** : $ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$.
- **Exemple** : $17 \times 23 = \frac{40^2 - 6^2}{4} = \frac{1600 - 36}{4} = \frac{1564}{4} = 391 \checkmark$
- **Vérification** : $17 \times 23 = 391 \checkmark$
- **Intérêt historique** : cette formule permettait de multiplier à l'aide de **tables de carrés** uniquement $\checkmark$
- **Cas particulier utile** : si $a - b = 1$, alors $ab = \frac{(a+b)^2 - 1}{4} \checkmark$
- **Contrôle** : $7 \times 8 = \frac{225 - 1}{4} = 56 \checkmark$

Réponse. $(a+b)^2 - (a-b)^2 = [2a][2b] = 4ab$.

Correction de l'exercice 9 - Équation avec identité cachée

- **Méthode** : on ramène à une différence de carrés.

$$(2x+1)^2 - (x-3)^2 = 0$$

- **Factorisation** avec $a = 2x+1$ et $b = x-3$:

$$[(2x+1) + (x-3)][(2x+1) - (x-3)] = (3x-2)(x+4) = 0$$

- **Solutions** : $x = \frac{2}{3}$ ou $x = -4$.

$$S = \left\langle -4; \frac{2}{3} \right\rangle$$

- **Vérifications** : pour $x = -4$, $(-7)^2 = 49$ et $(-7)^2 = 49 \checkmark$
- Pour $x = \frac{2}{3}$, $\left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9}$ et $\left(-\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9} \checkmark$
- **Interprétation** : deux carrés sont égaux si et seulement si les bases sont **égales ou opposées** $\checkmark$
- **Méthode alternative** : $2x+1 = x-3$ donne $x = -4$; $2x+1 = -(x-3)$ donne $3x = 2$, soit $x = \frac{2}{3} \checkmark$
- **Contrôle des deux méthodes** : elles donnent les **mêmes** solutions $\checkmark$
- **Erreur classique** : « simplifier » les carrés pour écrire $2x+1 = x-3$ — cela ne donne qu'une des deux solutions $\checkmark$
- **Contrôle par développement** : $4x^2 + 4x + 1 = x^2 - 6x + 9$ donne $3x^2 + 10x - 8 = 0$, et l'on vérifie que $(3x-2)(x+4) = 3x^2 + 12x - 2x - 8 \checkmark$

Réponse. $S = \left\langle -4; \frac{2}{3} \right\rangle$.

Correction de l'exercice 10 - Reconnaître un carré parfait

- **Premier** : $36 = 6^2$ et $12 = 2 \times 6 \checkmark$

$$x^2 + 12x + 36 = (x+6)^2$$

- **Contrôle en $x = 1$** : $1 + 12 + 36 = 49 = 7^2 \checkmark$
- **Deuxième** : il faudrait $30 = 6^2 = 36$, ce qui est **faux** — ce n'est **pas** un carré parfait $\checkmark$
- **Contrôle** : $x^2 + 12x + 30 = (x+6)^2 - 6$, donc il manque 6 $\checkmark$
- **Vérification en $x = 1$** : 43, et $49 - 6 = 43 \checkmark$

- **Troisième** : $4x^2 = (2x)^2$, $25 = 5^2$ et $20x = 2 \times 2x \times 5$ ✓

$$4x^2 - 20x + 25 = (2x - 5)^2$$
- **Contrôle en** $x = 1$: $4 - 20 + 25 = 9 = 3^2$ ✓
- **Contrôle en** $x = 0$: $25 = (-5)^2$ ✓
- **Méthode systématique** : identifier a et b par les **termes extrêmes** (qui doivent être des carrés), puis tester $2ab$ contre le terme central ✓
- **Conséquence pour le deuxième** : il n'est pas factorisable avec des nombres simples, mais ses racines existent — $x = -6 \pm \sqrt{6}$ ✓
- **Contrôle** : la somme vaut -12 ✓ et le produit $36 - 6 = 30$ ✓
- **Signe du terme constant** : pour un carré parfait, il doit être **positif** — donc $x^2 + 6x - 9$ n'en est jamais un ✓

Réponse. Le premier $((x + 6)^2)$ et le troisième $((2x - 5)^2)$; le deuxième ne l'est pas.

Correction de l'exercice 11 - Factoriser avec un facteur commun caché

- **Pour A** : facteur commun $(x - 1)$.

$$A = (x - 1)[(x - 1) - (3x + 2)] = (x - 1)(-2x - 3) = -(x - 1)(2x + 3)$$
- **Contrôle en** $x = 0$: $1 - (-1)(2) = 1 + 2 = 3$, et $-(-1)(3) = 3$ ✓
- **Contrôle en** $x = 2$: $1 - (1)(8) = -7$, et $-(1)(7) = -7$ ✓
- **Piège du signe** : $-(3x + 2) = -3x - 2$, et non $-3x + 2$ ✓
- **Pour B** : différence de carrés avec $a = 2x + 5$ et $b = 3$.

$$B = (2x + 5 - 3)(2x + 5 + 3) = (2x + 2)(2x + 8) = 4(x + 1)(x + 4)$$
- **Contrôle en** $x = 0$: $25 - 9 = 16$, et $4 \times 1 \times 4 = 16$ ✓
- **Contrôle en** $x = 1$: $49 - 9 = 40$, et $4 \times 2 \times 5 = 40$ ✓
- **Simplification finale** : on extrait 2 de chaque facteur, d'où le 4 ✓
- **Racines de B** : -1 et -4 ✓
- **Vérification** : $(2 \times (-1) + 5)^2 = 9$ ✓ et $(2 \times (-4) + 5)^2 = 9$ ✓
- **Forme développée de B** : $4x^2 + 20x + 16$, soit $4(x^2 + 5x + 4)$ ✓

Réponse. $A = -(x - 1)(2x + 3)$ et $B = 4(x + 1)(x + 4)$.

Correction de l'exercice 12 - Problème géométrique

- **Aire initiale** : x^2 ; **aire finale** : $(x + 4)^2$.
- **Augmentation** :

$$(x + 4)^2 - x^2 = x^2 + 8x + 16 - x^2 = 8x + 16$$
- **Forme factorisée** : $8(x + 2)$ ✓
- **Méthode rapide** : $a^2 - b^2$ avec $a = x + 4$ et $b = x$ donne $(2x + 4) \times 4 = 8x + 16$ ✓
- **Équation** : $8x + 16 = 80$, soit $8x = 64$ et

$$x = 8 \text{ cm}$$
- **Vérifications** : aire initiale 64 cm^2 , aire finale 144 cm^2 , écart 80 cm^2 ✓
- **Contrôle par la formule** : $8 \times 8 + 16 = 80$ ✓
- **Interprétation géométrique** : l'augmentation se décompose en deux rectangles $4 \times x$ et un carré 4×4 , soit $2 \times 4x + 16 = 8x + 16$ ✓
- **Vérification pour** $x = 8$: $2 \times 32 + 16 = 80 \text{ cm}^2$ ✓

- **Linéarité** : l'augmentation est une fonction **affine** de x , ce qui surprend pour des aires ✓
- **Augmentation relative** : $\frac{80}{64} = 125\%$, alors que le côté n'a augmenté que de 50% ✓
- **Cohérence** : $1,5^2 = 2,25$, soit $+125\%$ ✓

Réponse. L'aire augmente de $8x + 16 = 8(x + 2) \text{ cm}^2$; elle vaut 80 cm^2 pour $x = 8 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 13 - Identité et arithmétique

- **Première partie** : $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$, qui est le carré de l'entier $n + 1$ ✓
- **Contrôles** : $n = 3$ donne $16 = 4^2$ ✓ ; $n = 10$ donne $121 = 11^2$ ✓
- **Seconde partie** : on observe que $n^2 + 2n + 2 = (n + 1)^2 + 1$.
- **Encadrement** : pour $n \geq 1$, on a $n + 1 \geq 2$, donc

$$(n + 1)^2 < (n + 1)^2 + 1 < (n + 2)^2$$
- **Justification de la borne droite** : $(n + 2)^2 = (n + 1)^2 + 2n + 3$, et $2n + 3 > 1$ pour $n \geq 1$ ✓
- **Conclusion** : le nombre est **strictement entre** deux carrés consécutifs, il ne peut donc **pas** être un carré ✓
- **Contrôles** : $n = 3$ donne 17, entre 16 et 25 ✓ ; $n = 10$ donne 122, entre 121 et 144 ✓ ; $n = 1$ donne 5, entre 4 et 9 ✓
- **Cas $n = 0$** : le nombre vaut 2, qui n'est pas un carré non plus ✓
- **Cas $n = -1$** : le nombre vaut $1 = 1^2$ — un carré ! D'où la restriction $n \geq 1$ ✓
- **Méthode générale** : pour montrer qu'un nombre n'est pas un carré, il suffit de l'**encadrer strictement** entre deux carrés consécutifs ✓
- **Variante** : $n^2 + 1$ n'est jamais un carré pour $n \geq 1$, par le même argument ✓
- **Contrôle** : $n = 4$ donne 17, entre 16 et 25 ✓

Réponse. $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$; et $n^2 + 2n + 2 = (n + 1)^2 + 1$ est strictement entre deux carrés consécutifs.

Correction de l'exercice 14 - Simplifier une expression

- **Factorisation du numérateur** : $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$ ✓
- **Factorisation du dénominateur** : $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$ ✓
- **Simplification** :

$$A = \frac{(x - 5)(x + 5)}{(x + 5)^2} = \frac{x - 5}{x + 5}$$

- **Contrôle en $x = 0$** : $\frac{-25}{25} = -1$, et $\frac{-5}{5} = -1$ ✓
- **Contrôle en $x = 1$** : $\frac{-24}{36} = -\frac{2}{3}$, et $\frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$ ✓
- **Contrôle en $x = 5$** : $\frac{0}{100} = 0$, et $\frac{0}{10} = 0$ ✓
- **Condition d'existence** : $x \neq -5$, sinon le dénominateur s'annule ✓
- **Erreur classique** : simplifier terme par terme, par exemple « $\frac{x^2}{x^2} = 1$ » — on ne simplifie que des **facteurs** ✓
- **Détection** : le test en $x = 0$ donnerait un résultat absurde ✓
- **Valeur limite** : quand x devient grand, A tend vers 1 ✓

- **Contrôle** : $x = 100$ donne $\frac{95}{105} \approx 0,905$ ✓
- **Zéro de l'expression** : $x = 5$, seul point où A s'annule ✓

Réponse. $A = \frac{x-5}{x+5}$.

Correction de l'exercice 15 - Somme de deux carrés

- **Première partie** : $x^2 \geq 0$ et $y^2 \geq 0$, donc leur somme est nulle **seulement** si les deux termes le sont ✓
- **Conclusion** : $x^2 = 0$ et $y^2 = 0$, donc $x = y = 0$ ✓
- **Seconde partie** : on complète **deux** carrés.
- **En x** : $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$.
- **En y** : $y^2 + 6y = (y + 3)^2 - 9$.
- **Report** :

$$(x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 + 13 = (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 0$$

- **Contrôle du terme constant** : $-4 - 9 + 13 = 0$ ✓
- **Conclusion** : d'après la première partie, $x - 2 = 0$ et $y + 3 = 0$.
 $(x; y) = (2; -3)$
- **Vérification** : $4 - 8 + 9 - 18 + 13 = 0$ ✓
- **Interprétation géométrique** : l'équation décrit un **cercle de rayon nul**, réduit à son centre $(2; -3)$ ✓
- **Variante** : avec $+12$ au lieu de $+13$, on aurait $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 1$ — un vrai **cercle** de rayon 1 ✓
- **Variante impossible** : avec $+14$, on aurait une somme de carrés égale à -1 , donc **aucune** solution ✓
- **Méthode** : la complétion du carré transforme une équation à deux inconnues en une somme de carrés, immédiatement interprétable ✓

Réponse. Une somme de carrés est nulle si chacun l'est ; d'où $(x; y) = (2; -3)$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : étude complète

a) **Forme canonique.** On factorise d'abord par 2.

$$f(x) = 2(x^2 - 6x + 5) = 2[(x - 3)^2 - 9 + 5] = 2[(x - 3)^2 - 4]$$

$$f(x) = 2(x - 3)^2 - 8$$

- **Contrôle par développement** :
 $2(x^2 - 6x + 9) - 8 = 2x^2 - 12x + 18 - 8 = 2x^2 - 12x + 10$ ✓
- b) **Forme factorisée** — différence de carrés dans le crochet :

$$f(x) = 2[(x - 3) - 2][(x - 3) + 2] = 2(x - 5)(x - 1)$$

- **Contrôle par développement** : $2(x^2 - 6x + 5) = 2x^2 - 12x + 10$ ✓

c) **Résolution.** La forme factorisée donne les racines :

$$S = \{1; 5\}$$

- **Vérifications** : $f(1) = 2 - 12 + 10 = 0$ ✓ et $f(5) = 50 - 60 + 10 = 0$ ✓
- **Inéquation** $f(x) \leq 0$: le coefficient dominant 2 est **positif**, donc f est négative **entre** ses racines.

$$S = [1 ; 5]$$

- **Contrôles** : $f(3) = 18 - 36 + 10 = -8 \leq 0 \checkmark$; $f(0) = 10 > 0 \checkmark$;
 $f(6) = 72 - 72 + 10 = 10 > 0 \checkmark$

d) **Minimum**. La forme canonique le donne directement.

minimum -8 atteint en $x = 3$

- **Contrôle** : $f(3) = -8 \checkmark$
- **Cohérence** : 3 est le **milieu** des racines 1 et 5 $\checkmark$
- **Contrôles voisins** : $f(2) = 8 - 24 + 10 = -6 \checkmark$ et $f(4) = 32 - 48 + 10 = -6 \checkmark$ —
symétriques
- **Récapitulatif des trois formes** : développée $2x^2 - 12x + 10$, canonique $2(x - 3)^2 - 8$,
factorisée $2(x - 5)(x - 1)$ — chacune a servi à une question $\checkmark$
- **Contrôle croisé en** $x = 2$: $8 - 24 + 10 = -6$; $2 \times 1 - 8 = -6$; $2(-3)(1) = -6 \checkmark$

Réponse. a) $2(x - 3)^2 - 8$ · b) $2(x - 5)(x - 1)$ · c) $S = \{1 ; 5\}$ puis $[1 ; 5]$ · d) minimum -8
en $x = 3$.