Plaquette 3 – Inéquations, tableaux de signes et comparaisons

Calcul littéral et équations — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Inéquation du premier degré. On isole x ; **multiplier ou diviser par un négatif inverse le sens**.

$$-4x \geq 12 \iff x \leq -3$$

Signe d'une expression affine $ax + b$:

— racine en $x = -\dfrac{b}{a}$;

— du signe de a **après** la racine, du signe contraire avant.

Tableau de signes d'un produit. On dresse une ligne par facteur, puis on **multiplie les signes** colonne par colonne.

Signes des facteurs	Produit
+ et +	+
− et −	+
+ et −	−

Quotient. Même tableau, mais on marque une **double barre** aux valeurs interdites (celles qui annulent le dénominateur).

Opérations sur les inégalités.

Opération	Effet sur le sens
ajouter un même nombre	conservé
additionner deux inégalités de même sens	conservé
multiplier par $k > 0$	conservé
multiplier par $k < 0$	**inversé**

Comparer deux quantités. Par la **différence** : $A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0$. Par le **rapport**, pour deux nombres strictement positifs : $A \geq B \Leftrightarrow \dfrac{A}{B} \geq 1$.

Deux inéquations à la fois. L'ensemble des solutions est l'**intersection** des solutions de chaque inéquation.

Correction de l'exercice 1 – Inéquation simple

On déplace les termes en x du côté où leur coefficient reste positif, ici à droite, pour ne jamais diviser par un nombre négatif :

$$4x + 9 < 7x - 3 \Leftrightarrow 9 + 3 < 7x - 4x \Leftrightarrow 12 < 3x \Leftrightarrow 4 < x$$

On a divisé par 3, positif : le sens de l'inégalité est conservé. Donc $S =]4\,;+\infty[$.

Vérification : $x = 5$ donne $29 < 32$, vrai ; $x = 4$ donne $25 < 25$, faux, d'où la borne 4 exclue. Si l'on regroupe à gauche, on obtient $-3x < -12$, et la division par -3 **change** le sens : $x > 4$, même résultat.

Réponse. $S =]4\,;+\infty[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 2 – Inéquation avec négatif

On développe le membre de gauche, en distribuant le -3 sur les deux termes : $-3(x-2) = -3x+6$. Puis on regroupe les x à droite, où leur coefficient devient positif :

$$-3x+6 \geq 5x+14 \Leftrightarrow 6-14 \geq 5x+3x \Leftrightarrow -8 \geq 8x \Leftrightarrow -1 \geq x$$

On a divisé par $8 > 0$, le sens est conservé : $S =]-\infty\,;-1]$.

Vérification : en $x = -1$, les deux membres valent 9, la borne est incluse puisque l’inégalité est large ; en $x = 0$, $6 \geq 14$ est faux. Le piège est le signe : $-3 \times (-2) = +6$, et non -6.

Réponse. $S =]-\infty\,;-1]$.

Correction de l’exercice 3 – Tableau de signes d’un produit

On cherche où chaque facteur s’annule : $2x-4=0$ pour $x=2$, et $5-x=0$ pour $x=5$. Le facteur $2x-4$ (coefficient $2>0$) est négatif avant 2, positif après ; le facteur $5-x$ (coefficient $-1<0$) est positif avant 5, négatif après. La règle des signes donne le tableau :

x	$]-\infty\,;2[$	2	$]2\,;5[$	5	$]5\,;+\infty[$
$2x-4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$5-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
produit	$-$	0	$+$	0	$-$

Le produit est strictement positif entre les deux racines, qui sont exclues puisque l’inégalité est stricte :

$$S =]2\,;5[$$

Vérification : $x=3$ donne $2 \times 2 = 4 > 0$; $x=6$ donne $8 \times (-1) = -8 < 0$.

Réponse. Positif sur $]2\,;5[$, négatif ailleurs ; $S =]2\,;5[$.

Correction de l’exercice 4 – Tableau de signes d’un quotient

La valeur $x = 0{,}5$ annule le dénominateur : elle est **interdite**. Le numérateur s’annule en $x=-3$. On étudie le signe de chaque terme et on applique la règle des signes du quotient, la même que pour un produit :

x	$]-\infty\,;-3[$	-3	$]-3\,;0{,}5[$	$0{,}5$	$]0{,}5\,;+\infty[$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
quotient	$+$	0	$-$	interdite	$+$

Le quotient est négatif ou nul sur $[-3\,;0{,}5[$:

$$S = [-3\,;0{,}5[$$

-3 est inclus, car le quotient y vaut 0 ; 0,5 est exclu, car le quotient n’y est pas défini.

Vérification : $x=0$ donne $\dfrac{3}{-1} = -3 \leq 0$. Multiplier par $2x-1$ sans connaître son signe serait une faute.

Réponse. $S = [-3\,;0{,}5[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 5 – Somme d’inégalités et encadrement

$a + b$**.** On additionne membre à membre deux inégalités de même sens :

$$2 + (-3) \leq a + b \leq 5 + 1 \Leftrightarrow -1 \leq a + b \leq 6$$

$3a$**.** On multiplie par $3 > 0$, le sens est conservé : $6 \leq 3a \leq 15$.

$-2b$**.** On multiplie par $-2 < 0$, le sens est **inversé** : $(-2) \times 1 \leq -2b \leq (-2) \times (-3)$, soit $-2 \leq -2b \leq 6$.

$a - b$**.** On écrit $a - b = a + (-b)$. En multipliant par -1 : $-1 \leq -b \leq 3$. Puis on additionne :

$$2 + (-1) \leq a - b \leq 5 + 3 \Leftrightarrow 1 \leq a - b \leq 8$$

Le piège. On ne **soustrait jamais** deux inégalités membre à membre : $2 - (-3) = 5$ et $5 - 1 = 4$ donneraient « $5 \leq a - b \leq 4$ », absurde. **Contrôle** avec $a = 2$, $b = 1$: $a - b = 1$, qui est bien la plus petite valeur possible.

Réponse. $-1 \leq a + b \leq 6$; $6 \leq 3a \leq 15$; $-2 \leq -2b \leq 6$; $1 \leq a - b \leq 8$.

Correction de l’exercice 6 – Comparer par la différence

a) On étudie le signe de la différence :

$$A - B = n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n = 1 > 0$$

Donc $A > B$ pour tout réel n : $(n + 1)^2$ dépasse toujours $n^2 + 2n$ de exactement 1.

b) On calcule la différence et on reconnaît une identité remarquable :

$$x^2 + 1 - 2x = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$$

Un carré est positif ou nul, donc $x^2 + 1 \geq 2x$ pour tout réel x. L’égalité a lieu quand $(x - 1)^2 = 0$, c’est-à-dire pour $x = 1$ seulement.

Contrôle : $x = 3$ donne $10 \geq 6$; $x = -2$ donne $5 \geq -4$; $x = 1$ donne $2 = 2$. Comparer par la différence, c’est se ramener à l’étude d’un **signe**.

Réponse. a) $A - B = 1 > 0$, donc $A > B$ · b) $x^2 + 1 - 2x = (x - 1)^2 \geq 0$; égalité pour $x = 1$.

Correction de l’exercice 7 – Comparer par le rapport

a) Les deux prix sont positifs ; leur rapport vaut

$$\frac{60}{48} = 1{,}25 > 1$$

Le nouveau prix est 1,25 fois l’ancien : il a augmenté de 25 %. La comparaison par la différence donne une autre information, une hausse de 12 € : l’une est **multiplicative**, l’autre **additive**.

b) On écrit les deux nombres comme des puissances d’exposant 10 :

$$a = 3^{20} = \left(3^2\right)^{10} = 9^{10} \qquad b = 2^{30} = \left(2^3\right)^{10} = 8^{10}$$

Leur rapport vaut $\frac{a}{b} = \left(\frac{9}{8}\right)^{10}$, et $\frac{9}{8} > 1$: un produit de facteurs tous supérieurs à 1 est supérieur à 1. Donc $a > b$.

Contrôle : $3^{20} = 3\,486\,784\,401$ et $2^{30} = 1\,073\,741\,824$; on a bien $a > b$, et même $a > 3b$.

Réponse. a) rapport 1,25 : hausse de 25 % (soit +12 €) · b) $\frac{a}{b} = \left(\frac{9}{8}\right)^{10} > 1$, donc $3^{20} > 2^{30}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Deux inéquations à la fois

On résout chaque inéquation séparément, puis on garde les réels qui vérifient les deux.

— $3x - 2 \leq 7 \Leftrightarrow 3x \leq 9 \Leftrightarrow x \leq 3$.
— $5 - 2x < 1 \Leftrightarrow 4 < 2x \Leftrightarrow x > 2$ (on a déplacé $2x$ à droite pour garder un coefficient positif).

L'ensemble des solutions est l'intersection de $]-\infty\,;3]$ et de $]2\,;+\infty[$:

$$S =]2\,;3]$$

Vérification des bornes : $x = 3$ donne $7 \leq 7$ et $-1 < 1$, inclus ; $x = 2$ donne $1 < 1$, faux, exclu. Le seul entier solution est 3.

Réponse. $S =]2\,;3]$.

Correction de l'exercice 9 – Problème à deux tarifs

On note e le tarif enfant, en euros. La place adulte coûte 6,50 € de plus : son tarif est $e + 6{,}50$. Une seule inconnue suffit, et l'achat s'écrit

$$3(e + 6{,}50) + 2e = 37 \Leftrightarrow 5e + 19{,}50 = 37 \Leftrightarrow 5e = 17{,}50 \Leftrightarrow e = 3{,}50$$

La place enfant coûte 3,50 € et la place adulte 10 €.

Vérification : $3 \times 10 + 2 \times 3{,}50 = 30 + 7 = 37$ € ✓, et $10 - 3{,}50 = 6{,}50$ € ✓. **La méthode** : quand l'énoncé relie deux grandeurs (« de plus que », « le double de »), on exprime l'une en fonction de l'autre pour n'avoir qu'**une** équation.

Réponse. Enfant 3,50 € et adulte 10 €.

Correction de l'exercice 10 – Inéquation produit

On passe tout dans le même membre pour comparer à 0, puis on factorise par l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

$$x^2 \leq 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) \leq 0$$

Le facteur $x + 3$ s'annule en -3, le facteur $x - 3$ en 3. Avant -3, les deux sont négatifs, le produit est positif ; entre -3 et 3, ils sont de signes contraires, le produit est négatif ; après 3, il est positif. Donc $S = [-3\,;3]$.

Vérification : $x = -4$ donne $16 \leq 9$, faux. C'est l'erreur classique : écrire seulement $x \leq 3$ oublie que les grands nombres négatifs ont un grand carré.

Réponse. $S = [-3\,;3]$ (soit $|x| \leq 3$).

Correction de l'exercice 11 – Problème d'optimisation simple

Pour n objets, la recette vaut $15n$ € et le coût $200 + 7n$ €. L'artisan est bénéficiaire quand la recette dépasse le coût :

$$15n > 200 + 7n \Leftrightarrow 8n > 200 \Leftrightarrow n > 25$$

Comme n est entier, il est bénéficiaire à partir de 26 objets.

Vérification : pour 25 objets, recette et coût valent 375 € (équilibre exact) ; pour 26, la recette est de 390 € pour un coût de 382 €. Le nombre 8 est la marge par objet, $15 - 7$: il faut $\dfrac{200}{8} = 25$ objets pour couvrir les frais fixes.

Réponse. À partir de 26 objets (seuil de rentabilité à 25).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 12 – Inéquation avec fractions

On multiplie les deux membres par 12, nombre **positif** : le sens de l’inégalité est conservé, et les fractions disparaissent.

$$4(2x-1)-3(x+2)>12 \Leftrightarrow 8x-4-3x-6>12 \Leftrightarrow 5x>22 \Leftrightarrow x>4{,}4$$

Donc $S=]4{,}4\,;+\infty[$.

Vérification : en $x=5$, $\frac{9}{3}-\frac{7}{4}=1{,}25>1$; en $x=4{,}4$, on obtient exactement 1, la borne est exclue. Le piège est le signe devant la seconde fraction : $-3(x+2)=-3x-6$.

Réponse. $S=]4{,}4\,;+\infty[$.

Correction de l’exercice 13 – Exprimer une variable en fonction des autres

a) On divise les deux membres par R, non nul : $I=\dfrac{U}{R}$.

b) On divise par πr^2, non nul :

$$h=\frac{V}{\pi r^2}=\frac{500}{25\pi}=\frac{20}{\pi}\approx 6{,}37 \text{ cm}$$

c) On isole y : $2y=12-3x$, donc $y=6-\dfrac{3}{2}x$.

Pour que y soit un entier, $\frac{3}{2}x$ doit être entier : x doit être **pair**. Pour que $y\geq 0$, il faut $\frac{3}{2}x\leq 6$, soit $x\leq 4$. Il reste $x=0$, 2 ou 4 :

x	0	2	4
y	6	3	0

Contrôle : $0+12=12$, $6+6=12$, $12+0=12$ ✓. Les points $(0\,;6)$, $(2\,;3)$ et $(4\,;0)$ sont alignés sur la droite $y=6-1{,}5x$.

Réponse. a) $I=\frac{U}{R}$ · b) $h=\frac{V}{\pi r^2}=\frac{20}{\pi}\approx 6{,}37$ cm · c) $y=6-\frac{3}{2}x$; $(0\,;6)$, $(2\,;3)$, $(4\,;0)$.

Correction de l’exercice 14 – Signe d’un trinôme factorisé

L’expression est un produit de trois facteurs : la constante -2, toujours négative, et deux facteurs affines qui s’annulent en 1 et en -4. On dresse le tableau de signes :

x	$]-\infty\,;-4[$	-4	$]-4\,;1[$	1	$]1\,;+\infty[$
-2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
produit	$-$	0	$+$	0	$-$

L’expression est positive sur $]-4\,;1[$, nulle en -4 et en 1, négative ailleurs.

Vérification : $x=0$ donne $-2\times(-1)\times 4=8>0$, et $x=2$ donne $-2\times 1\times 6=-12<0$. Le facteur -2 inverse tous les signes du produit $(x-1)(x+4)$.

Réponse. Positive sur $]-4\,;1[$, négative ailleurs (parabole tournée vers le bas).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Problème de comparaison de tarifs

Pour s séances par mois, le premier tarif coûte $30 + 2s$ € et le second $5s$ €. Le premier est avantageux quand il coûte moins cher :

$$30 + 2s < 5s \Leftrightarrow 30 < 3s \Leftrightarrow s > 10$$

Le premier abonnement devient avantageux à partir de 11 séances par mois.

Vérification : à 10 séances, les deux tarifs coûtent 50 € ; à 11 séances, 52 € contre 55 €. Interprétation : chaque séance fait économiser 3 € avec le premier tarif, il faut donc $\dfrac{30}{3} = 10$ séances pour rembourser l’abonnement. Un pratiquant occasionnel, à 4 séances, paie 20 € avec le second tarif contre 38 € avec le premier.

Réponse. À partir de 11 séances par mois (indifférence à 10).

Correction de l’exercice 16 – Inéquation à paramètre

On isole x. Le coefficient de x est 2, positif, quelle que soit la valeur de m : diviser par 2 ne change jamais le sens de l’inégalité.

$$2x + m > 5 \Leftrightarrow 2x > 5 - m \Leftrightarrow x > \frac{5 - m}{2}$$

Pour tout m, $S = \left]\dfrac{5 - m}{2} ; +\infty\right[$: le paramètre ne fait que déplacer la borne.

Le réel 1 est solution si et seulement si $2 \times 1 + m > 5$, c’est-à-dire $m > 3$. **Vérification** : pour $m = 4$, la borne vaut 0,5 et $1 > 0{,}5$; pour $m = 3$, la borne vaut 1, et $1 > 1$ est faux. Pour $mx > 5$, il aurait fallu discuter le signe de m.

Réponse. $S = \left]\dfrac{5 - m}{2} ; +\infty\right[$ pour tout m ; $x = 1$ est solution si $m > 3$.

Correction de l’exercice 17 – Synthèse : problème complet

a) Le demi-périmètre vaut 100 m, c’est la somme de la longueur et de la largeur : la largeur vaut $100 - x$, avec $0 < x < 100$. L’aire est $A(x) = x(100 - x)$.

b) On développe le membre de droite :
$-(x - 30)(x - 70) = -(x^2 - 100x + 2\,100) = -x^2 + 100x - 2\,100$, qui est bien $x(100 - x) - 2\,100$. L’aire dépasse 2 100 m² quand

$$-(x - 30)(x - 70) > 0 \Leftrightarrow (x - 30)(x - 70) < 0$$

Ce produit est négatif quand ses facteurs sont de signes contraires, c’est-à-dire entre les racines : $S =]30\,;\,70[$. **Vérification** : $A(40) = 2\,400$ et $A(20) = 1\,600$.

c) $2\,500 - (x - 50)^2 = 2\,500 - x^2 + 100x - 2\,500 = 100x - x^2$. Un carré est positif ou nul, donc $A(x) \leq 2\,500$, avec égalité seulement pour $x = 50$:

$$A_{\max} = 2\,500 \text{ m}^2$$

Le champ est alors un carré de 50 m de côté : à périmètre fixé, c’est le carré qui offre la plus grande aire.

Réponse. a) largeur $100 - x$, aire $x(100 - x)$ · b) $S =]30\,;\,70[$ · c) 2 500 m² pour un carré de 50 m.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).