

Plaquette 3 – Inéquations, tableaux de signes et systèmes

Calcul littéral et équations — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Inéquation du premier degré. On isole x ; **multiplier ou diviser par un négatif inverse le sens.**

$$-4x \geq 12 \iff x \leq -3$$

Signe d'une expression affine $ax + b$:

- racine en $x = -\frac{b}{a}$;
- du signe de a **après** la racine, du signe contraire avant.

Tableau de signes d'un produit. On dresse une ligne par facteur, puis on **multiplie les signes** colonne par colonne.

Signes des facteurs	Produit
+ et +	+
– et –	+
+ et –	–

Quotient. Même tableau, mais on marque une **double barre** aux valeurs interdites (celles qui annulent le dénominateur).

Systèmes de deux équations.

Méthode	Principe
substitution	exprimer une inconnue et la remplacer
combinaison	additionner les lignes pour éliminer une inconnue
graphique	intersection de deux droites

Nombre de solutions d'un système.

- **Une** solution : les droites sont sécantes.
- **Aucune** : droites parallèles distinctes.
- **Une infinité** : droites confondues.

Système d'inéquations. La solution est l'**intersection** des solutions de chaque inéquation.

Correction de l'exercice 1 – Inéquation simple

— **Regroupement** : $9 + 3 < 7x - 4x$, soit $12 < 3x$.

— **Division par $3 > 0$** : le sens est conservé.

$$4 < x \quad \text{soit} \quad x > 4$$

— **Solution** : $S =]4; +\infty[$ ✓

— **Contrôles** : $x = 5$ donne $29 < 32$ ✓ ; $x = 4$ donne $25 < 25$, **faux** (égalité) ✓ ; $x = 0$ donne $9 < -3$, faux ✓

- **Méthode choisie** : on a déplacé les x à **droite** pour obtenir un coefficient positif, évitant toute division par un négatif ✓
- **Autre voie** : $4x - 7x < -3 - 9$ donne $-3x < -12$, puis $x > 4$ après inversion ✓
- **Contrôle par la différence** : $(7x - 3) - (4x + 9) = 3x - 12$, positif pour $x > 4$ ✓
- **Interprétation graphique** : la droite $y = 7x - 3$ passe **au-dessus** de $y = 4x + 9$ après leur intersection en $(4; 25)$ ✓

Réponse. $S =]4; +\infty[$.

Correction de l'exercice 2 - Inéquation avec négatif

- **Développement** : $-3x + 6 \geq 5x + 14$.
- **Regroupement** : $6 - 14 \geq 5x + 3x$, soit $-8 \geq 8x$.
- **Division par $8 > 0$** :

$$-1 \geq x \quad \text{soit} \quad x \leq -1$$
- **Solution** : $S =]-\infty; -1]$ ✓
- **Contrôles** : $x = -1$ donne $-3(-3) = 9$ et $5(-1) + 14 = 9$ — **égalité**, borne incluse ✓
- $x = -2$ donne $12 \geq 4$ ✓ ; $x = 0$ donne $6 \geq 14$, faux ✓
- **Piège du signe** : $-3(x - 2) = -3x + 6$, et non $-3x - 6$ ✓
- **Détection** : avec l'erreur, on obtiendrait $x \leq -2,5$, et le test en $x = -2$ donnerait un résultat faux ✓
- **Méthode sûre** : déplacer les x du côté où le coefficient devient positif — ici à droite ✓
- **Contrôle par la différence** : $-3x + 6 - 5x - 14 = -8x - 8$, positif pour $x \leq -1$ ✓

Réponse. $S =]-\infty; -1]$.

Correction de l'exercice 3 - Tableau de signes d'un produit

- **Racines** : $2x - 4 = 0$ donne $x = 2$; $5 - x = 0$ donne $x = 5$.
- **Signes des facteurs** : $2x - 4$ est croissant (coefficient $+2$) ; $5 - x$ est **décroissant** (coefficient -1).
- **Tableau** :

! x	2	5
$2x - 4$	—	0
$5 - x$	+	+
produit	—	0

- **Analyse intervalle par intervalle** :
- sur $] -\infty; 2[$: $(-) \times (+) = -$;
- sur $]2; 5[$: $(+) \times (+) = +$;
- sur $]5; +\infty[$: $(+) \times (-) = -$.
- **Solution de l'inéquation stricte** :

$$S =]2; 5[$$
- **Contrôles** : $x = 3$ donne $(2)(2) = 4 > 0$ ✓ ; $x = 0$ donne $(-4)(5) = -20 < 0$ ✓ ; $x = 6$ donne $(8)(-1) = -8 < 0$ ✓
- **Bornes exclues** : les racines annulent le produit, ce qui ne vérifie pas l'inégalité stricte ✓
- **Attention au facteur décroissant** : $5 - x$ est **positif avant** 5 et négatif après — l'inverse d'un facteur croissant ✓

- **Astuce** : réécrire $5 - x = -(x - 5)$ pour retrouver un facteur croissant, au prix d'un signe global ✓
- **Forme développée** : $-2x^2 + 14x - 20$ — la parabole s'ouvre vers le bas, donc elle est positive **entre** ses racines ✓

Réponse. Positif sur $]2; 5[$, négatif ailleurs ; $S =]2; 5[$.

Correction de l'exercice 4 - Tableau de signes d'un quotient

- **Valeur interdite** : $2x - 1 = 0$ donne $x = 0,5$ ✓
- **Racine du numérateur** : $x = -3$.
- **Tableau** :

! x	-3	0,5
$x + 3$	-	0
$2x - 1$	-	-
quotient	+	0

- **Analyse** :
- sur $] - \infty; -3[$: $\frac{-}{-} = +$;
- sur $] -3; 0,5[$: $\frac{+}{-} = -$;
- sur $]0,5; +\infty[$: $\frac{+}{+} = +$.
- **Solution** :

$$S = [-3; 0,5[$$

- **Bornes** : -3 est **inclus** (le quotient y vaut 0), mais $0,5$ est **exclu** (valeur interdite) ✓
- **Contrôles** : $x = -3$ donne $\frac{0}{-7} = 0 \leq 0$ ✓ ; $x = 0$ donne $\frac{3}{-1} = -3 \leq 0$ ✓ ; $x = 1$ donne $\frac{4}{1} = 4 > 0$ ✓ ; $x = -4$ donne $\frac{-1}{-9} \approx 0,111 > 0$ ✓
- **Erreur classique** : inclure $0,5$ dans la solution — le quotient n'y est **pas défini** ✓
- **Autre erreur** : multiplier par $2x - 1$ sans discuter son signe — cela inverserait le sens de l'inégalité sur une partie du domaine ✓
- **Leçon** : pour une inéquation quotient, on passe **toujours** par un tableau de signes ✓

Réponse. $S = [-3; 0,5[$.

Correction de l'exercice 5 - Système par substitution

- **Substitution** : la première ligne donne y , on la remplace dans la seconde.

$$3x + 2(2x - 3) = 8$$
- **Développement** : $3x + 4x - 6 = 8$, soit $7x = 14$ et $x = 2$.
- **Puis** : $y = 2 \times 2 - 3 = 1$.

$$(x; y) = (2; 1)$$
- **Vérifications** : $y = 1 = 4 - 3$ ✓ et $3 \times 2 + 2 \times 1 = 8$ ✓
- **Choix de la méthode** : la substitution est idéale quand une inconnue est **déjà isolée** ✓
- **Interprétation graphique** : les droites $y = 2x - 3$ et $y = \frac{8 - 3x}{2} = 4 - 1,5x$ se coupent en $(2; 1)$ ✓
- **Contrôle des pentes** : 2 et $-1,5$ sont différentes, donc les droites sont **sécantes** — une seule solution ✓

- **Vérification de la seconde équation sous forme réduite** : $4 - 1,5 \times 2 = 1$ ✓
- **Piège** : oublier les parenthèses dans $2(2x - 3)$ donnerait $3x + 4x - 3 = 8$, soit $x = \frac{11}{7}$ — et la vérification échouerait ✓

Réponse. $(x; y) = (2; 1)$.

Correction de l'exercice 6 - Système par combinaison

- **Objectif** : éliminer y . On multiplie la seconde ligne par 2.
$$\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ 10x - 4y = 16 \end{cases}$$
- **Addition** : $13x = 26$, donc $x = 2$.
- **Substitution dans la première** : $6 + 4y = 10$, donc $y = 1$.
 $(x; y) = (2; 1)$
- **Vérifications** : $3 \times 2 + 4 \times 1 = 10$ ✓ et $5 \times 2 - 2 \times 1 = 8$ ✓
- **Choix du coefficient** : multiplier par 2 transforme $-2y$ en $-4y$, opposé du $+4y$ ✓
- **Variante** : on aurait pu éliminer x en multipliant la première par 5 et la seconde par 3, puis en soustrayant ✓
- **Contrôle de cette variante** : $15x + 20y = 50$ et $15x - 6y = 24$, de différence $26y = 26$, soit $y = 1$ ✓
- **Critère de choix** : prendre l'inconnue dont les coefficients se combinent le plus simplement ✓
- **Contrôle du déterminant** : $3 \times (-2) - 5 \times 4 = -26 \neq 0$, donc le système a une **unique** solution ✓
- **Piège** : oublier de multiplier **aussi** le second membre ($8 \rightarrow 16$) ✓

Réponse. $(x; y) = (2; 1)$.

Correction de l'exercice 7 - Système sans solution

- **Premier système** : on multiplie la première ligne par 2, ce qui donne $4x - 6y = 10$.
- **Comparaison** : la seconde ligne dit $4x - 6y = 7$.
- **Contradiction** : $10 \neq 7$ ✓
$$S = \emptyset$$
- **Interprétation** : les droites ont la **même pente** $\frac{2}{3}$ mais des ordonnées à l'origine différentes — elles sont **parallèles distinctes** ✓
- **Second système** : la seconde ligne est exactement le **double** de la première.
- **Conclusion** : les deux équations sont **équivalentes**, il y a une **infinité** de solutions ✓
$$S = \{(x; y) \text{ tels que } 2x - 3y = 5\}$$
- **Paramétrage** : en posant $x = t$, on obtient $y = \frac{2t - 5}{3}$ ✓
- **Contrôles** : $t = 4$ donne $y = 1$, et $8 - 3 = 5$ ✓ ; $t = 1$ donne $y = -1$, et $2 + 3 = 5$ ✓
- **Interprétation** : les droites sont **confondues** ✓
- **Critère général** : le déterminant $2 \times (-6) - 4 \times (-3) = -12 + 12 = 0$ dans les **deux** cas — c'est le second membre qui départage ✓
- **Récapitulatif** : déterminant nul et équations proportionnelles $\rightarrow$ infinité ; déterminant nul et équations incompatibles $\rightarrow$ aucune solution ✓

Réponse. $S = \emptyset$ pour le premier ; une infinité (droites confondues) pour le second.

Correction de l'exercice 8 - Système d'inéquations

- **Première inéquation** : $3x \leq 9$, donc $x \leq 3$, soit $] - \infty ; 3]$ ✓
- **Seconde inéquation** : $5 - 1 < 2x$, donc $4 < 2x$ et $x > 2$, soit $]2 ; +\infty[$ ✓
- **Intersection** :

$$S =]2 ; 3]$$
- **Contrôles** : $x = 2,5$ donne $5,5 \leq 7$ ✓ et $0 < 1$ ✓
- $x = 3$ donne $7 \leq 7$ ✓ et $-1 < 1$ ✓ — borne **incluse**
- $x = 2$ donne $4 \leq 7$ ✓ mais $1 < 1$ **faux** — borne **exclue** ✓
- $x = 4$ donne $10 \leq 7$, faux ✓
- **Méthode sûre pour la seconde** : déplacer les x à droite, où le coefficient devient positif ✓
- **Cas d'un système impossible** : $\begin{cases} x \leq 1 \\ x > 3 \end{cases}$ donnerait $S = \emptyset$ ✓
- **Représentation** : on hachure les deux demi-droites et on garde la zone **commune** ✓
- **Entiers solutions** : le seul entier de $]2 ; 3]$ est 3 ✓

Réponse. $S =]2 ; 3]$.

Correction de l'exercice 9 - Problème avec système

- **Inconnues** : a le tarif adulte et e le tarif enfant, en euros.
- **Système** :

$$\begin{cases} 3a + 2e = 37 \\ 2a + 4e = 34 \end{cases}$$
- **Simplification de la seconde** : on divise par 2, soit $a + 2e = 17$.
- **Soustraction** : $(3a + 2e) - (a + 2e) = 37 - 17$, donc $2a = 20$ et

$$a = 10 \text{ €} \quad e = 3,50 \text{ €}$$
- **Calcul de e** : $10 + 2e = 17$ donne $e = 3,50$ ✓
- **Vérifications** : $3 \times 10 + 2 \times 3,50 = 30 + 7 = 37 \text{ €}$ ✓ et $2 \times 10 + 4 \times 3,50 = 20 + 14 = 34 \text{ €}$ ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : des tarifs positifs, et le tarif enfant **inférieur** à l'adulte ✓
- **Astuce** : diviser la seconde équation par 2 **avant** de combiner simplifie beaucoup ✓
- **Contrôle du déterminant** : $3 \times 4 - 2 \times 2 = 8 \neq 0$, donc la solution est **unique** ✓
- **Tarif famille** (2 adultes + 3 enfants) : $20 + 10,50 = 30,50 \text{ €}$ ✓
- **Rapport des tarifs** : $\frac{10}{3,50} \approx 2,857$ — l'adulte paie presque trois fois plus ✓

Réponse. Adulte 10 € et enfant 3,50 €.

Correction de l'exercice 10 - Inéquation produit

- **Mise sous forme factorisée** : $x^2 - 9 \leq 0$, soit

$$(x - 3)(x + 3) \leq 0$$
- **Racines** : -3 et 3 .
- **Signe** : le produit est **négatif entre** les racines (coefficient dominant positif).
- **Solution** :

$$S = [-3 ; 3]$$

- **Contrôles** : $x = 0$ donne $0 \leq 9$ ✓ ; $x = 3$ donne $9 \leq 9$ ✓ ; $x = 4$ donne $16 \leq 9$, faux ✓ ; $x = -4$ donne $16 \leq 9$, faux ✓
- **Erreur classique** : écrire $x \leq 3$ en oubliant les valeurs négatives ✓
- **Détection** : le test en $x = -4$ révèle l'erreur, car $-4 \leq 3$ mais $16 > 9$ ✓
- **Lecture avec la valeur absolue** : $x^2 \leq 9$ équivaut à $|x| \leq 3$, soit $-3 \leq x \leq 3$ ✓
- **Règle générale** : $x^2 \leq a$ avec $a > 0$ donne $[-\sqrt{a}; \sqrt{a}]$ ✓
- **Inéquation contraire** : $x^2 \geq 9$ donne $] -\infty; -3] \cup [3; +\infty[$ ✓
- **Cas $a < 0$** : $x^2 \leq -4$ n'a **aucune** solution, un carré étant positif ✓

Réponse. $S = [-3; 3]$ (soit $|x| \leq 3$).

Correction de l'exercice 11 - Problème d'optimisation simple

- **Recette** : $15n$ pour n objets.
- **Coût** : $200 + 7n$.
- **Condition de bénéfice** :

$$15n > 200 + 7n$$
- **Résolution** : $8n > 200$, donc

$$n > 25$$
- **Réponse** : à partir de 26 objets ✓
- **Contrôles** : $n = 25$ donne 375 € de recette contre 375 € de coût — **équilibre exact** ✓
- $n = 26$ donne 390 € contre 382 €, soit 8 € de bénéfice ✓
- $n = 20$ donne 300 € contre 340 €, soit une **perte** de 40 € ✓
- **Seuil de rentabilité** : 25 objets ✓
- **Marge unitaire** : $15 - 7 = 8$ € par objet ✓
- **Interprétation** : il faut $\frac{200}{8} = 25$ objets pour couvrir les frais fixes ✓
- **Bénéfice pour 100 objets** : $8 \times 100 - 200 = 600$ € ✓
- **Contrôle** : $1500 - 900 = 600$ € ✓
- **Effet d'une hausse du prix à 16 €** : la marge passe à 9 €, et le seuil tombe à $\frac{200}{9} \approx 22,2$, soit 23 objets ✓

Réponse. À partir de 26 objets (seuil de rentabilité à 25).

Correction de l'exercice 12 - Inéquation avec fractions

- **Dénominateur commun** : 12. On multiplie par $12 > 0$ (sens conservé).

$$4(2x - 1) - 3(x + 2) > 12$$
- **Développement** : $8x - 4 - 3x - 6 > 12$, soit $5x - 10 > 12$ et $5x > 22$.

$$x > \frac{22}{5} = 4,4$$
- **Solution** : $S =]4,4; +\infty[$ ✓
- **Vérification en $x = 4,4$** : $\frac{7,8}{3} - \frac{6,4}{4} = 2,6 - 1,6 = 1$ — **égalité**, donc borne exclue ✓
- **Contrôle en $x = 5$** : $\frac{9}{3} - \frac{7}{4} = 3 - 1,75 = 1,25 > 1$ ✓
- **Contrôle en $x = 4$** : $\frac{7}{3} - \frac{6}{4} \approx 2,333 - 1,5 = 0,833 < 1$ ✓
- **Piège du signe** : $-3(x + 2) = -3x - 6$, et non $-3x + 6$ ✓

- **Détection** : avec l'erreur, on obtiendrait $5x > 10$ soit $x > 2$, et le test en $x = 3$ donnerait $1,667 - 1,25 = 0,417 < 1$ — faux ✓
- **Contrôle par la fonction** : $\frac{5x-10}{12}$ est croissante, donc la solution est bien une demi-droite **droite** ✓
- **Vérification** : $\frac{5 \times 4,4 - 10}{12} = \frac{12}{12} = 1$ ✓

Réponse. $S =]4,4; +\infty[$.

Correction de l'exercice 13 - Système à trois inconnues simple

- **Substitution** : on remplace y et z dans la première équation.

$$x + 2x + (x + 3) = 12$$
- **Simplification** : $4x + 3 = 12$, donc $4x = 9$ et $x = 2,25$.
- **Puis** : $y = 4,5$ et $z = 5,25$.

$$(x; y; z) = (2,25; 4,5; 5,25)$$
- **Vérifications** : $2,25 + 4,5 + 5,25 = 12$ ✓ ; $4,5 = 2 \times 2,25$ ✓ ; $5,25 = 2,25 + 3$ ✓
- **Méthode** : quand deux inconnues sont **déjà exprimées**, la substitution est immédiate ✓
- **Contrôle des proportions** : y est bien le double de x ✓, et z dépasse x de 3 ✓
- **Réponse non entière** : c'est normal, rien dans l'énoncé n'impose des entiers ✓
- **Variante avec des entiers** : si la somme valait 15, on aurait $4x = 12$, soit $x = 3$, $y = 6$ et $z = 6$ ✓
- **Contrôle** : $3 + 6 + 6 = 15$ ✓
- **Écriture en fractions** : $x = \frac{9}{4}$, $y = \frac{9}{2}$ et $z = \frac{21}{4}$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{9}{4} + \frac{18}{4} + \frac{21}{4} = \frac{48}{4} = 12$ ✓

Réponse. $(x; y; z) = (2,25; 4,5; 5,25)$.

Correction de l'exercice 14 - Signe d'un trinôme factorisé

- **Racines** : $x = 1$ et $x = -4$.
- **Facteur constant** : $-2 < 0$, ce qui **inverse** tous les signes ✓
- **Tableau** :

! x	-4	1
$x - 1$	$-$	0
$x + 4$	0	$+$
-2	$-$	$-$
produit	$-$	0

- **Analyse** :
- sur $] -\infty; -4[$: $-2 \times (-) \times (-) = -$;
- sur $] -4; 1[$: $-2 \times (-) \times (+) = +$;
- sur $] 1; +\infty[$: $-2 \times (+) \times (+) = -$.
- **Conclusion** : l'expression est **positive entre** les racines, négative à l'extérieur ✓
- **Contrôles** : $x = 0$ donne $-2(-1)(4) = 8 > 0$ ✓ ; $x = 2$ donne $-2(1)(6) = -12 < 0$ ✓ ;
 $x = -5$ donne $-2(-6)(-1) = -12 < 0$ ✓

- **Lecture graphique** : c'est une parabole tournée vers le **bas** (coefficient -2), donc positive entre ses racines ✓
- **Forme développée** : $-2(x^2 + 3x - 4) = -2x^2 - 6x + 8$ ✓
- **Contrôle** : en $x = 0$, on obtient 8 ✓
- **Maximum** : au sommet $x = \frac{-4 + 1}{2} = -1,5$, avec la valeur $-2(-2,5)(2,5) = 12,5$ ✓
- **Règle** : pour un produit $a(x - r_1)(x - r_2)$, l'expression est du signe de a **à l'extérieur** des racines ✓

Réponse. Positive sur $] -4; 1[$, négative ailleurs (parabole tournée vers le bas).

Correction de l'exercice 15 - Problème de comparaison de tarifs

- **Coût du premier** : $30 + 2s$ pour s séances.
- **Coût du second** : $5s$.
- **Condition** :

$$30 + 2s < 5s$$
- **Résolution** : $30 < 3s$, donc

$$s > 10$$
- **Réponse** : à partir de 11 séances par mois ✓
- **Contrôles** : $s = 10$ donne 50 € contre 50 € — **égalité** ✓
- $s = 11$ donne 52 € contre 55 € ✓ — le premier gagne
- $s = 5$ donne 40 € contre 25 € ✓ — le second gagne
- **Seuil d'indifférence** : 10 séances ✓
- **Interprétation** : le premier abonnement « rembourse » ses 30 € fixes grâce à l'économie de 3 € par séance ✓
- **Contrôle** : $\frac{30}{3} = 10$ ✓
- **Économie pour 20 séances** : $100 - 70 = 30$ € ✓
- **Fréquence de pratique** : 11 séances par mois représentent environ 2,5 séances par semaine — un pratiquant régulier ✓
- **Conseil** : un pratiquant occasionnel (une fois par semaine, soit 4 séances) doit choisir le **second** tarif, qui lui coûtera 20 € contre 38 € ✓

Réponse. À partir de 11 séances par mois (indifférence à 10).

Correction de l'exercice 16 - Inéquation à paramètre

- **Résolution générale** : $2x > 5 - m$, donc

$$x > \frac{5 - m}{2}$$
- **Remarque** : le coefficient 2 étant **positif**, le sens ne change **jamais** — le paramètre m ne déplace que la borne ✓
- **Solution** : $S = \left] \frac{5 - m}{2}; +\infty \right[$ pour **tout** m ✓
- **Condition pour que** $x = 1$ **soit solution** : $2 + m > 5$, donc

$$m > 3$$
- **Contrôles** : pour $m = 4$, la borne vaut $\frac{1}{2} = 0,5$, et $1 > 0,5$ ✓
- Pour $m = 3$, la borne vaut 1, et $1 > 1$ est **faux** ✓
- Pour $m = 0$, la borne vaut 2,5, et $1 > 2,5$ est **faux** ✓

- **Lecture** : plus m est grand, plus la borne est **basse** et plus l'ensemble de solutions est **large** ✓
- **Contrôle de monotonie** : $\frac{5-m}{2}$ est une fonction **décroissante** de m ✓
- **Cas où tous les réels positifs sont solutions** : il faudrait $\frac{5-m}{2} \leq 0$, soit $m \geq 5$ ✓
- **Différence avec un paramètre en facteur** : pour $mx > 5$, il faudrait discuter le **signe** de m — ici ce n'est pas nécessaire ✓

Réponse. $S =]\frac{5-m}{2}; +\infty[$ pour tout m ; $x = 1$ est solution si $m > 3$.

Correction de l'exercice 17 - Synthèse : problème complet

a) **Largeur** : le demi-périmètre vaut 100 m, donc la largeur est $100 - x$.

— **Domaine** : $0 < x < 100$ ✓

— **Aire** :

$$A(x) = x(100 - x) = 100x - x^2$$

— **Contrôles** : $A(30) = 30 \times 70 = 2100 \text{ m}^2$ ✓ ; $A(50) = 2500 \text{ m}^2$ ✓

b) **Inéquation** : $x(100 - x) > 2100$, soit $-x^2 + 100x - 2100 > 0$.

— **Factorisation** : on cherche les racines de $x^2 - 100x + 2100 = 0$.

— **Somme et produit** : on cherche deux nombres de somme 100 et de produit 2100 — ce sont 30 et 70 ✓

— **Contrôle** : $30 + 70 = 100$ ✓ et $30 \times 70 = 2100$ ✓

$$-x^2 + 100x - 2100 = -(x - 30)(x - 70)$$

— **Signe** : le coefficient -1 rend l'expression **positive entre** les racines.

— **Solution** :

$$S =]30; 70[$$

— **Contrôles** : $A(40) = 40 \times 60 = 2400 > 2100$ ✓ ; $A(20) = 20 \times 80 = 1600 < 2100$ ✓ ;
 $A(80) = 80 \times 20 = 1600 < 2100$ ✓

— **Symétrie** : l'intervalle est centré sur 50 ✓

c) **Aire maximale**. Par symétrie, le maximum est au centre de l'intervalle, soit $x = 50$.

$$A(50) = 50 \times 50 = 2500 \text{ m}^2$$

— **Forme du champ** : un **carré** de 50 m de côté ✓

— **Forme canonique** : $A(x) = -(x^2 - 100x) = -[(x - 50)^2 - 2500] = 2500 - (x - 50)^2$ ✓

— **Lecture immédiate** : l'aire vaut au plus 2500 m^2 , avec égalité si et seulement si $x = 50$ ✓

— **Contrôles** : $A(45) = 45 \times 55 = 2475 \text{ m}^2$ et $A(55) = 2475 \text{ m}^2$ ✓ — symétriques et inférieurs

— **Résultat général** : à périmètre fixé, le **carré** maximise l'aire parmi les rectangles ✓

— **Comparaison** : un champ de 10 m sur 90 m aurait la même clôture mais seulement 900 m^2 — moins de la moitié ✓

Réponse. a) largeur $100 - x$, aire $x(100 - x)$ · b) $S =]30; 70[$ · c) 2500 m^2 pour un carré de 50 m.