Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : modélisation et résolution

Calcul littéral et équations — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les cinq étapes d'un problème.

1. **Lire** l'énoncé deux fois et repérer la question posée. 2. **Nommer** l'inconnue, avec son unité et son domaine. 3. **Traduire** chaque donnée par une égalité ou une inégalité. 4. **Résoudre** l'équation ou l'inéquation. 5. **Vérifier** dans l'énoncé et contrôler la **vraisemblance**.

Quel outil pour quelle question ?

Question de l'énoncé	Outil
« quel est… ? »	**équation**
« à partir de combien… ? »	**inéquation**
deux grandeurs liées	**une seule inconnue** : exprimer l'une en fonction de l'autre
« quelle valeur maximale… ? »	forme $k-(x-\alpha)^2$ donnée, vérifiée en développant

Traductions courantes.

Énoncé	Écriture
le double de x	$2x$
x augmenté de 5	$x+5$
x diminué de 10 %	$0{,}9x$
trois nombres consécutifs	$n-1$, n, $n+1$
x et y dans le rapport 3 pour 2	$\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$

Traduire un pourcentage. Augmenter de t %, c'est multiplier par un coefficient :

$$\text{valeur finale} = \text{valeur initiale} \times \left(1+\frac{t}{100}\right)$$

Pour retrouver la valeur initiale, on **divise** par ce coefficient.

Contrôles de vraisemblance à ne jamais oublier. Un effectif doit être un **entier positif** ; une longueur, une masse, un prix, une durée doivent être **positifs** ; un pourcentage est entre 0 et 100.

Si l'on trouve deux solutions, il faut examiner si **les deux** conviennent au contexte — souvent une seule est acceptable.

Correction de l'exercice 1 – Problème de nombres

On note y le plus petit nombre. Leur différence vaut 13 : le plus grand vaut $y+13$. La somme donne une équation à une seule inconnue :

$$y+(y+13)=47 \Leftrightarrow 2y=34 \Leftrightarrow y=17$$

Le plus grand vaut $17+13=30$.

Vérification : $30+17=47$ et $30-17=13$. Les nombres cherchés sont 30 et 17. Plus

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

généralement, deux nombres de somme S et de différence D valent $\frac{S+D}{2}$ et $\frac{S-D}{2}$; ce sont des entiers seulement si S et D ont la même parité.

Réponse. 30 et 17.

Correction de l'exercice 2 – Problème d'âges

On note f l'âge de la fille aujourd'hui. La somme des âges vaut 38 : Anna a $38 - f$ ans. Dans 5 ans, chacune aura 5 ans de plus, d'où

$$38 - f + 5 = 3(f + 5) \Leftrightarrow 43 - f = 3f + 15 \Leftrightarrow 28 = 4f \Leftrightarrow f = 7$$

puis Anna a $38 - 7 = 31$ ans.

Vérification : $31 + 7 = 38$, et dans 5 ans, $36 = 3 \times 12$. Anna a 31 ans et sa fille 7 ans. Remarque : l'écart d'âge, 24 ans, ne change jamais ; quand Anna aura le triple de l'âge de sa fille, cet écart vaudra deux fois l'âge de la fille, qui aura donc 12 ans.

Réponse. Anna 31 ans et sa fille 7 ans.

Correction de l'exercice 3 – Problème de mélange

La masse de cuivre initiale est $60 \times 0{,}30 = 18$ kg. On note x la masse de cuivre pur ajoutée : le cuivre passe à $18 + x$ kg, mais la masse totale passe **aussi** à $60 + x$ kg. On veut une proportion de 40 % :

$$\frac{18 + x}{60 + x} = 0{,}40 \Leftrightarrow 18 + x = 0{,}40(60 + x) \Leftrightarrow 18 + x = 24 + 0{,}4x \Leftrightarrow 0{,}6x = 6$$

donc $x = 10$ kg. **Vérification** : $\frac{28}{70} = 0{,}40$.

L'erreur classique est d'oublier que le total augmente : $\frac{18 + x}{60} = 0{,}40$ donnerait 6 kg, et une proportion réelle de $\frac{24}{66} \approx 36\,\%$ seulement.

Réponse. 10 kg de cuivre pur.

Correction de l'exercice 4 – Problème de périmètre et d'aire

a) Le demi-périmètre, 17 cm, est la somme de la longueur et de la largeur : la largeur vaut $17 - L$. L'aire donne

$$L(17 - L) = 60 \Leftrightarrow 17L - L^2 = 60 \Leftrightarrow L^2 - 17L + 60 = 0$$

b) En développant, $(L - 5)(L - 12) = L^2 - 12L - 5L + 60 = L^2 - 17L + 60$. L'équation devient $(L - 5)(L - 12) = 0$, d'où $L = 5$ ou $L = 12$.

Si $L = 12$, la largeur vaut 5 ; si $L = 5$, elle vaut 12 : dans les deux cas, c'est le même rectangle de 12 cm sur 5 cm. **Vérification** : $2(12 + 5) = 34$ cm et $12 \times 5 = 60$ cm².

Réponse. a) largeur $17 - L$ · b) 12 cm et 5 cm.

Correction de l'exercice 5 – Problème de vitesse

a) La durée du trajet est la distance divisée par la vitesse : $\frac{240}{v}$ h à la vitesse v, et $\frac{240}{v + 20}$ h à la vitesse $v + 20$. La différence vaut 1 h :

$$\frac{240}{v} - \frac{240}{v + 20} = 1$$

On multiplie par $v(v + 20)$, non nul : $240(v + 20) - 240v = v(v + 20)$, soit $4\,800 = v^2 + 20v$, c'est-à-dire $v^2 + 20v - 4\,800 = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) En développant, $(v-60)(v+80) = v^2 + 80v - 60v - 4\,800 = v^2 + 20v - 4\,800$. L'équation s'écrit $(v-60)(v+80) = 0$, donc $v = 60$ ou $v = -80$. Une vitesse est positive : $v = 60$ km/h.

Vérification : $\frac{240}{60} = 4$ h et $\frac{240}{80} = 3$ h, soit bien 1 h de gagnée.

Réponse. a) voir la correction · b) 60 km/h (4 h contre 3 h à 80 km/h).

Correction de l'exercice 6 – Problème de pourcentage

On note x le loyer initial. Augmenter de 15 %, c'est multiplier par $1 + \frac{15}{100} = 1{,}15$:

$$1{,}15x = 828 \Leftrightarrow x = \frac{828}{1{,}15} = 720$$

Le loyer initial était de 720 €. **Vérification** : $720 \times 1{,}15 = 828$ €.

L'erreur classique est de retirer 15 % au nouveau loyer : $828 \times 0{,}85 = 703{,}80$ €, qui redonne 809,37 € après hausse. Les 15 % portaient sur l'**ancien** loyer : pour revenir en arrière, on divise par le coefficient multiplicateur.

Réponse. 720 € (et non 703,80 €).

Correction de l'exercice 7 – Problème d'inéquation

On note n la quatrième note. La moyenne des quatre devoirs doit être au moins 12 :

$$\frac{12 + 9 + 14 + n}{4} \geq 12 \Leftrightarrow 35 + n \geq 48 \Leftrightarrow n \geq 13$$

On a multiplié par 4, positif, ce qui conserve le sens. Il faut au moins 13.

Vérification : avec 13, la moyenne vaut $\frac{48}{4} = 12$. La réponse doit aussi être réalisable : pour une moyenne de 14, il faudrait $n \geq 21$, impossible sur 20. La meilleure moyenne possible est $\frac{35 + 20}{4} = 13{,}75$.

Réponse. Au moins 13 (la moyenne maximale atteignable est 13,75).

Correction de l'exercice 8 – Problème de partage inégal

On note x la part du premier, en euros. Le deuxième reçoit $x + 12$ et le troisième $2x$. Le total vaut 153 € :

$$x + (x + 12) + 2x = 153 \Leftrightarrow 4x + 12 = 153 \Leftrightarrow 4x = 141 \Leftrightarrow x = 35{,}25$$

Les parts valent 35,25 €, 47,25 € et 70,50 €.

Vérification : $35{,}25 + 47{,}25 + 70{,}50 = 153$ €, et $70{,}50 = 2 \times 35{,}25$. Une solution non entière n'est pas une erreur, puisqu'elle a un sens en euros et centimes. Avec un total de 156 €, on aurait obtenu des parts entières : 36, 48 et 72 €.

Réponse. 35,25 €, 47,25 € et 70,50 €.

Correction de l'exercice 9 – Problème avec deux tarifs

Pour n visites, l'entrée à l'unité coûte $28n$ € et le pass $95 + 8n$ €. Le pass est rentable quand il coûte moins cher :

$$95 + 8n < 28n \Leftrightarrow 95 < 20n \Leftrightarrow n > 4{,}75$$

Le nombre de visites est entier : le pass est rentable à partir de 5 visites.

Vérification : 5 visites coûtent 135 € avec le pass contre 140 € sans ; 4 visites coûtent

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

127 € contre 112 €. Chaque visite avec pass économise $28 - 8 = 20$ €, et il faut $\frac{95}{20} = 4{,}75$ visites pour amortir le pass.

Réponse. À partir de 5 visites (seuil à 4,75).

Correction de l'exercice 10 – Problème géométrique avec équation

a) Les côtés de l'angle droit mesurent $h - 2$ et $h - 9$. Le théorème de Pythagore donne

$$h^2 = (h-2)^2 + (h-9)^2 = h^2 - 4h + 4 + h^2 - 18h + 81$$

En retirant h^2 des deux membres : $0 = h^2 - 22h + 85$.

b) En développant, $(h-5)(h-17) = h^2 - 17h - 5h + 85 = h^2 - 22h + 85$. L'équation donne $h = 5$ ou $h = 17$. Pour $h = 5$, le petit côté vaudrait $5 - 9 = -4$ cm, ce qui est impossible. Donc $h = 17$ cm, et les côtés de l'angle droit mesurent 15 cm et 8 cm.

Vérification : $15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289 = 17^2$. C'est le triplet pythagoricien 8-15-17.

Réponse. a) par le théorème de Pythagore · b) 8 cm, 15 cm et 17 cm.

Correction de l'exercice 11 – Problème de robinets

On raisonne avec les **débits**, en fraction de bassin par heure. Le robinet remplit $\frac{1}{8}$ de bassin par heure, la fuite en retire $\frac{1}{12}$. Le débit net est leur différence :

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{3}{24} - \frac{2}{24} = \frac{1}{24} \text{ bassin par heure}$$

Il faut donc 24 h pour remplir le bassin.

Vérification : en 24 h, le robinet apporte 3 bassins et la fuite en retire 2 ; il en reste 1. Le temps trouvé est supérieur aux 8 h du robinet seul, ce qui est logique. L'erreur classique, soustraire les temps ($12 - 8 = 4$ h), donnerait un remplissage plus rapide malgré la fuite : absurde.

Réponse. 24 h (débit net de $\frac{1}{24}$ bassin par heure).

Correction de l'exercice 12 – Problème à deux grandeurs liées

On note l le nombre de lapins ; il y a donc $32 - l$ poules. Une poule a 2 pattes, un lapin 4 :

$$2(32 - l) + 4l = 94 \Leftrightarrow 64 + 2l = 94 \Leftrightarrow 2l = 30 \Leftrightarrow l = 15$$

puis $32 - 15 = 17$ poules.

Vérification : $17 + 15 = 32$ et $2 \times 17 + 4 \times 15 = 34 + 60 = 94$. Il y a 17 poules et 15 lapins. Raisonnement rapide : avec 32 poules, on compterait 64 pattes ; chaque lapin en ajoute 2, et il manque 30 pattes, d'où 15 lapins.

Réponse. 17 poules et 15 lapins.

Correction de l'exercice 13 – Problème de concentration

Le volume de sucre, $5 \times 0{,}60 = 3$ L, ne change pas quand on ajoute de l'eau. On note x le volume d'eau ajouté : le volume total devient $5 + x$, et la concentration doit valoir 12 % :

$$\frac{3}{5+x} = 0{,}12 \Leftrightarrow 3 = 0{,}12(5+x) \Leftrightarrow 3 = 0{,}6 + 0{,}12x \Leftrightarrow x = \frac{2{,}4}{0{,}12} = 20$$

Il faut ajouter 20 L d'eau, pour un volume final de 25 L.

Vérification : $\frac{3}{25} = 0{,}12$. La concentration est divisée par 5 (60 % devient 12 %), donc le

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

volume est multiplié par 5. Écrire $\frac{3}{x} = 0{,}12$ oublierait le volume initial de sirop.

Réponse. 20 L d'eau (volume final de 25 L).

Correction de l'exercice 14 – Problème d'optimisation

a) Le grillage couvre deux côtés de longueur x et le côté parallèle au bâtiment, qui mesure donc $120 - 2x$ (avec $0 < x < 60$). L'aire vaut $A(x) = x(120 - 2x) = 120x - 2x^2$.

b) On développe : $1\,800 - 2(x - 30)^2 = 1\,800 - 2(x^2 - 60x + 900) = -2x^2 + 120x$, qui est bien $A(x)$. Comme $(x - 30)^2 \geq 0$,

$$A(x) = 1\,800 - 2(x - 30)^2 \leq 1\,800$$

avec égalité pour $x = 30$. L'aire maximale vaut 1 800 m², pour un enclos de 30 m sur $120 - 60 = 60$ m.

Vérification : $2 \times 30 + 60 = 120$ m de grillage. Pour $x = 25$, l'aire n'est que de $25 \times 70 = 1\,750$ m².

Réponse. a) $A(x) = x(120 - 2x)$ · b) 1 800 m², pour un enclos de 30 m sur 60 m.

Correction de l'exercice 15 – Problème avec inéquation double

On traduit « compris entre 500 et 900 » par un encadrement, que l'on transforme en gardant les mêmes opérations sur les trois membres :

$$500 \leq 25n - 750 \leq 900 \Leftrightarrow 1\,250 \leq 25n \leq 1\,650 \Leftrightarrow 50 \leq n \leq 66$$

On a ajouté 750, puis divisé par 25, positif. L'artisan doit vendre entre 50 et 66 pièces, soit $66 - 50 + 1 = 17$ valeurs possibles.

Vérification : $B(50) = 1\,250 - 750 = 500$ € et $B(66) = 1\,650 - 750 = 900$ €, tandis que $B(67) = 925$ € dépasse la fourchette. Le bénéfice est nul pour $n = 30$: il faut 30 pièces pour couvrir les 750 € de frais fixes.

Réponse. Entre 50 et 66 pièces (soit 17 valeurs possibles).

Correction de l'exercice 16 – Problème de proportions

Le rapport $\frac{4}{7}$ signifie que pour 4 filles il y a 7 garçons : l'effectif se partage en $4 + 7 = 11$ parts égales. Une part vaut $\frac{33}{11} = 3$ élèves :

$$4 \times 3 = 12 \text{ filles} \qquad 7 \times 3 = 21 \text{ garçons}$$

Vérification : $12 + 21 = 33$ et $\frac{12}{21} = \frac{4 \times 3}{7 \times 3} = \frac{4}{7}$.

Par une équation : avec f filles, $\frac{f}{33 - f} = \frac{4}{7}$ donne $7f = 4(33 - f)$, soit $11f = 132$ et $f = 12$.

L'effectif total doit être un multiple de 11 : avec 30 élèves, ce rapport serait impossible.

Réponse. 12 filles et 21 garçons (une part valant 3 élèves).

Correction de l'exercice 17 – Synthèse : problème à plusieurs étapes

a) Le coût d'achat vaut $80 \times 15 = 1\,200$ €.

b) Une marge de 40 % sur le prix d'achat donne un prix de vente de $15 \times 1{,}40 = 21$ €. La recette des 60 premiers articles vaut $60 \times 21 = 1\,260$ €.

c) Les 20 articles soldés rapportent $20 \times 12 = 240$ €. La recette totale vaut $1\,260 + 240 = 1\,500$ €, et le bénéfice

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$1\,500 - 1\,200 = 300 \text{ €}$$

d) Avec un prix de solde p, le bénéfice vaut $1\,260 + 20p - 1\,200 = 60 + 20p$. On veut $60 + 20p = 400$, soit $20p = 340$ et $p = 17$ €.

Vérification : $1\,260 + 20 \times 17 = 1\,600$ €, soit 400 € de bénéfice. Ce prix reste inférieur au prix normal de 21 € : c’est encore une remise, de 4 € par article.

Réponse. a) 1 200 € · b) 21 € l’unité, 1 260 € · c) 1 500 € de recette et 300 € de bénéfice · d) 17 € l’article.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).