

## Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : modélisation et résolution

### Calcul littéral et équations — Seconde

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

##### Les cinq étapes d'un problème.

1. **Lire** l'énoncé deux fois et repérer la question posée. 2. **Nommer** l'inconnue, avec son unité et son domaine. 3. **Traduire** chaque donnée par une égalité ou une inégalité. 4. **Résoudre** l'équation, l'inéquation ou le système. 5. **Vérifier** dans l'énoncé et contrôler la **vraisemblance**.

##### Quel outil pour quelle question ?

| Question de l'énoncé              | Outil                  |
|-----------------------------------|------------------------|
| « quel est... ? »                 | <b>équation</b>        |
| « à partir de combien... ? »      | <b>inéquation</b>      |
| deux inconnues et deux conditions | <b>système</b>         |
| « quelle valeur maximale... ? »   | forme <b>canonique</b> |

##### Traductions courantes.

| Énoncé                              | Écriture                    |
|-------------------------------------|-----------------------------|
| le double de $x$                    | $2x$                        |
| $x$ augmenté de 5                   | $x + 5$                     |
| $x$ diminué de 10 %                 | $0,9x$                      |
| trois nombres consécutifs           | $n - 1, n, n + 1$           |
| $x$ et $y$ dans le rapport 3 pour 2 | $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ |

**Contrôles de vraisemblance à ne jamais oublier.** Un effectif doit être un **entier positif** ; une longueur, une masse, un prix, une durée doivent être **positifs** ; un pourcentage est entre 0 et 100.

**Si l'on trouve deux solutions**, il faut examiner si **les deux** conviennent au contexte — souvent une seule est acceptable.

#### Correction de l'exercice 1 – Problème de nombres

— **Inconnues** :  $x$  le plus grand et  $y$  le plus petit.

— **Système** :

$$\begin{cases} x + y = 47 \\ x - y = 13 \end{cases}$$

— **Addition** :  $2x = 60$ , donc  $x = 30$ .

— **Soustraction** :  $2y = 34$ , donc  $y = 17$ .

$$(x; y) = (30; 17)$$

— **Vérifications** :  $30 + 17 = 47$  ✓ et  $30 - 17 = 13$  ✓

- **Formules générales** :  $x = \frac{S+D}{2}$  et  $y = \frac{S-D}{2}$  ✓
- **Contrôles** :  $\frac{47+13}{2} = 30$  ✓ et  $\frac{47-13}{2} = 17$  ✓
- **Condition de parité** :  $S$  et  $D$  doivent avoir la **même parité** pour des solutions entières ✓
- **Contre-exemple** :  $S = 47$  et  $D = 12$  donneraient 29,5 et 17,5 ✓
- **Produit** :  $30 \times 17 = 510$  ✓
- **Contrôle** :  $\frac{S^2 - D^2}{4} = \frac{2209 - 169}{4} = \frac{2040}{4} = 510$  ✓

**Réponse.** 30 et 17.

## Correction de l'exercice 2 - Problème d'âges

- **Inconnues** :  $a$  l'âge d'Anna et  $f$  celui de sa fille, aujourd'hui.
- **Système** :

$$\begin{cases} a + f = 38 \\ a + 5 = 3(f + 5) \end{cases}$$

- **Développement de la seconde** :  $a + 5 = 3f + 15$ , soit  $a = 3f + 10$ .
- **Substitution** :  $3f + 10 + f = 38$ , donc  $4f = 28$  et  $f = 7$ .
- **Puis** :  $a = 31$ .

Anna 31 ans, sa fille 7 ans

- **Vérifications** :  $31 + 7 = 38$  ✓ ; dans 5 ans, 36 et 12, et  $36 = 3 \times 12$  ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : une mère de 31 ans avec une fille de 7 ans est plausible ✓
- **Écart d'âge** : 24 ans, **invariant** dans le temps ✓
- **Utilisation de l'invariant** : quand Anna a le triple, l'écart 24 vaut **deux fois** l'âge de la fille, qui a donc 12 ans — soit dans 5 ans ✓
- **Méthode élégante** : cet invariant donne la réponse **sans système** ✓
- **Quand aura-t-elle le double ?** L'écart vaudra l'âge de la fille, soit 24 ans — dans 17 ans ✓
- **Contrôle** :  $48 = 2 \times 24$  ✓

**Réponse.** Anna 31 ans et sa fille 7 ans.

## Correction de l'exercice 3 - Problème de mélange

- **Cuivre initial** :  $60 \times 0,30 = 18$  kg.
- **Inconnue** :  $x$  kg de cuivre pur ajoutés.
- **Équation** : la proportion finale doit valoir 0,40.

$$\frac{18 + x}{60 + x} = 0,40$$

- **Produit en croix** :  $18 + x = 0,40(60 + x) = 24 + 0,40x$ .
- **Résolution** :  $0,60x = 6$ , donc

$$x = 10 \text{ kg}$$

- **Vérifications** :  $\frac{18 + 10}{60 + 10} = \frac{28}{70} = 0,40$  ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : ajouter du cuivre **augmente** la proportion ✓

- **Erreur classique** : oublier que le **total** augmente aussi — écrire  $\frac{18+x}{60} = 0,40$  donnerait  $x = 6$  kg ✓
  - **Vérification de l'erreur** :  $\frac{24}{66} \approx 0,364 \neq 0,40$  ✓
  - **Pour atteindre 50 %** :  $\frac{18+x}{60+x} = 0,50$  donne  $x = 24$  kg ✓
  - **Contrôle** :  $\frac{42}{84} = 0,50$  ✓
  - **Limite** : on ne peut jamais atteindre 100 % avec une quantité finie ajoutée, puisque les 42 kg d'autres métaux restent ✓
- Réponse.** 10 kg de cuivre pur.

### Correction de l'exercice 4 - Problème de périmètre et d'aire

- **Demi-périmètre** : 17 cm, donc  $L + \ell = 17$ .
  - **Aire** :  $L\ell = 60$ .
  - **Méthode somme-produit** :  $L$  et  $\ell$  sont les racines de
 
$$t^2 - 17t + 60 = 0$$
  - **Recherche** : deux nombres de somme 17 et de produit 60 — ce sont 12 et 5 ✓
  - **Contrôle** :  $12 + 5 = 17$  ✓ et  $12 \times 5 = 60$  ✓
 
$$L = 12 \text{ cm} \quad \ell = 5 \text{ cm}$$
  - **Vérifications** : périmètre  $2(12 + 5) = 34$  cm ✓ et aire  $60 \text{ cm}^2$  ✓
  - **Méthode par substitution** :  $\ell = 17 - L$ , donc  $L(17 - L) = 60$ , soit  $L^2 - 17L + 60 = 0$  ✓
  - **Contrôle par le discriminant** :  $289 - 240 = 49$ , donc  $\sqrt{49} = 7$  et  $L = \frac{17 \pm 7}{2} \in \{5; 12\}$  ✓
  - **Condition d'existence** : il faut  $S^2 \geq 4P$ , soit  $289 \geq 240$  ✓
  - **Cas impossible** : un périmètre de 34 cm avec une aire de 80 cm<sup>2</sup> exigerait  $289 \geq 320$ , ce qui est **faux** — aucun rectangle ne convient ✓
  - **Aire maximale à périmètre 34 cm** : le carré de côté 8,5 cm, d'aire 72,25 cm<sup>2</sup> ✓
  - **Cohérence** :  $60 < 72,25$ , donc la solution existe bien ✓
- Réponse.** 12 cm et 5 cm.

### Correction de l'exercice 5 - Problème de vitesse

- **Inconnue** :  $v$  la vitesse en km/h, avec  $v > 0$ .
- **Temps initial** :  $\frac{240}{v}$  ; **temps accéléré** :  $\frac{240}{v+20}$ .
- **Équation** :
 
$$\frac{240}{v} - \frac{240}{v+20} = 1$$
- **Multipliation par**  $v(v+20)$ , non nul :
 
$$240(v+20) - 240v = v(v+20)$$
- **Simplification** :  $4800 = v^2 + 20v$ , soit
 
$$v^2 + 20v - 4800 = 0$$
- **Factorisation** : on cherche deux nombres de produit  $-4800$  et de somme 20 — ce sont 80 et  $-60$ .
 
$$(v - 60)(v + 80) = 0$$

- **Contrôle du développement** :  $v^2 + 80v - 60v - 4800 = v^2 + 20v - 4800$  ✓
- **Solutions** :  $v = 60$  ou  $v = -80$ .
- **Sélection** : une vitesse est **positive**, donc  

$$v = 60 \text{ km/h}$$
- **Vérifications** :  $\frac{240}{60} = 4 \text{ h}$  et  $\frac{240}{80} = 3 \text{ h}$  — l'écart vaut bien 1 h ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : une vitesse de train plausible ✓
- **Rejet de -80** : une vitesse négative est dépourvue de sens ici ✓
- **Gain relatif** : la vitesse augmente de 33,3 % et le temps baisse de 25 % ✓
- **Cohérence** :  $\frac{1}{4/3} = 0,75$  ✓ — propriété de la proportionnalité inverse
- **Contrôle du discriminant** :  $400 + 19\,200 = 19\,600 = 140^2$ , donc  $v = \frac{-20 \pm 140}{2} = 60$  ✓

**Réponse.** 60 km/h (4 h contre 3 h à 80 km/h).

### Correction de l'exercice 6 - Problème de pourcentage

- **Inconnue** :  $x$  le loyer initial en euros.
- **Équation** :  

$$1,15x = 828$$
- **Résolution** :  

$$x = \frac{828}{1,15} = 720 \text{ €}$$
- **Vérification** :  $720 \times 1,15 = 828 \text{ €}$  ✓
- **Erreur classique** : retirer 15 % du nouveau prix, soit  $828 \times 0,85 = 703,80 \text{ €}$  — **faux** ✓
- **Pourquoi** : les 15 % portaient sur l'**ancien** prix, pas sur le nouveau ✓
- **Contrôle de l'erreur** :  $703,80 \times 1,15 = 809,37 \text{ €} \neq 828 \text{ €}$  ✓
- **Montant de la hausse** :  $828 - 720 = 108 \text{ €}$  ✓
- **Contrôle** :  $720 \times 0,15 = 108 \text{ €}$  ✓
- **Baisse nécessaire pour revenir à 720 €** :  $\frac{108}{828} \approx 13,04 \%$  ✓
- **Règle** : pour annuler +15 %, il faut  $-\frac{15}{115} \approx -13,04 \%$  ✓
- **Méthode générale** : pour retrouver une valeur initiale, on **divise** par le coefficient, on ne soustrait pas le pourcentage ✓

**Réponse.** 720 € (et non 703,80 €).

### Correction de l'exercice 7 - Problème d'inéquation

- **Inconnue** :  $n$  la quatrième note.
- **Condition** :  

$$\frac{12 + 9 + 14 + n}{4} \geq 12$$
- **Résolution** :  $35 + n \geq 48$ , donc  

$$n \geq 13$$
- **Réponse** : au moins 13 ✓
- **Vérifications** : avec 13, la moyenne vaut  $\frac{48}{4} = 12$  ✓ ; avec 12,5, elle vaut  $11,875 < 12$  ✓

- **Contrôle de vraisemblance** : 13 est une note atteignable ✓
  - **Interprétation** : la moyenne des trois premières notes vaut  $\frac{35}{3} \approx 11,67$ , donc il manque 0,33 point par devoir, soit 1 point à rattraper sur le quatrième ✓
  - **Contrôle** :  $12 + 1 = 13$  ✓
  - **Pour atteindre 13 de moyenne** :  $n \geq 52 - 35 = 17$  ✓
  - **Pour atteindre 14** :  $n \geq 56 - 35 = 21$ , ce qui est **impossible** sur 20 ✓
  - **Moyenne maximale atteignable** :  $\frac{35 + 20}{4} = 13,75$  ✓
  - **Leçon** : il faut toujours vérifier que la solution est **réalisable** dans le contexte ✓
- Réponse.** Au moins 13 (la moyenne maximale atteignable est 13,75).

### Correction de l'exercice 8 - Problème de partage inégal

- **Inconnue** :  $x$  la part du premier, en euros.
- **Parts** :  $x$ ,  $x + 12$  et  $2x$ .
- **Équation** :
 
$$x + (x + 12) + 2x = 153$$
- **Résolution** :  $4x + 12 = 153$ , donc  $4x = 141$  et
 
$$x = 35,25 \text{ €}$$
- **Parts** : 35,25 €, 47,25 € et 70,50 € ✓
- **Vérifications** :  $35,25 + 47,25 + 70,50 = 153 \text{ €}$  ✓ ;  $47,25 - 35,25 = 12 \text{ €}$  ✓ ;  $70,50 = 2 \times 35,25$  ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : des montants positifs, exprimables en centimes ✓
- **Somme de contrôle** : la plus grosse part (70,50 €) est bien le double de la plus petite ✓
- **Proportions** : 23,04 %, 30,88 % et 46,08 % ✓
- **Contrôle** : la somme des pourcentages vaut 100 % ✓
- **Variante avec un total de 156 €** : on aurait  $4x = 144$ , soit  $x = 36 \text{ €}$  — des montants entiers ✓
- **Contrôle** :  $36 + 48 + 72 = 156 \text{ €}$  ✓
- **Leçon** : un résultat non entier n'est pas une erreur, dès lors qu'il a un sens (ici des centimes) ✓

**Réponse.** 35,25 €, 47,25 € et 70,50 €.

### Correction de l'exercice 9 - Problème avec deux tarifs

- **Coût sans pass** :  $28n$  pour  $n$  visites.
- **Coût avec pass** :  $95 + 8n$ .
- **Condition de rentabilité** :
 
$$95 + 8n < 28n$$
- **Résolution** :  $95 < 20n$ , donc
 
$$n > 4,75$$
- **Réponse** : à partir de 5 visites ✓
- **Vérifications** :  $n = 5$  donne 135 € avec pass contre 140 € sans — le pass gagne de 5 € ✓
- $n = 4$  donne 127 € contre 112 € — le pass est **perdant** de 15 € ✓
- **Seuil d'indifférence** : 4,75 visites, soit un franchissement entre 4 et 5 ✓

- **Économie par visite** :  $28 - 8 = 20$  € ✓
- **Interprétation** : il faut  $\frac{95}{20} = 4,75$  visites pour amortir les 95 € du pass ✓
- **Économie pour 12 visites** :  $336 - 191 = 145$  € ✓
- **Contrôle** :  $12 \times 20 - 95 = 240 - 95 = 145$  € ✓
- **Conseil** : un visiteur occasionnel (moins de 5 fois par an) paie à l'unité ✓

**Réponse.** À partir de 5 visites (seuil à 4,75).

### Correction de l'exercice 10 - Problème géométrique avec équation

- **Inconnue** :  $h$  l'hypoténuse en cm ; les cathètes valent  $h - 2$  et  $h - 9$ .
- **Pythagore** :  

$$h^2 = (h - 2)^2 + (h - 9)^2$$
- **Développement** :  $h^2 = h^2 - 4h + 4 + h^2 - 18h + 81$ , soit  

$$0 = h^2 - 22h + 85$$
- **Factorisation** : deux nombres de somme 22 et de produit 85 — ce sont 17 et 5 ✓  

$$(h - 17)(h - 5) = 0$$
- **Solutions** :  $h = 17$  ou  $h = 5$ .
- **Sélection** : il faut  $h > 9$  pour que la petite cathète soit positive, donc  

$$h = 17 \text{ cm}$$
- **Côtés** : 17, 15 et 8 cm ✓
- **Vérification de Pythagore** :  $225 + 64 = 289 = 17^2$  ✓
- **Rejet de  $h = 5$**  : la cathète vaudrait  $5 - 9 = -4$  cm, ce qui est **impossible** ✓
- **Contrôle des écarts** :  $17 - 15 = 2$  ✓ et  $17 - 8 = 9$  ✓
- **Triplet remarquable** : 8-15-17 est un triplet pythagoricien classique ✓
- **Aire** :  $\frac{15 \times 8}{2} = 60 \text{ cm}^2$  ✓
- **Périmètre** : 40 cm ✓

**Réponse.** 8 cm, 15 cm et 17 cm.

### Correction de l'exercice 11 - Problème de robinets

- **Débit de remplissage** :  $\frac{1}{8}$  bassin/h.
- **Débit de la fuite** :  $-\frac{1}{12}$  bassin/h.
- **Débit net** :  

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{3}{24} - \frac{2}{24} = \frac{1}{24} \text{ bassin/h}$$
- **Temps** :  

$$t = 24 \text{ h}$$
- **Vérification** : en 24 h, le robinet apporte 3 bassins et la fuite en évacue 2 — il reste bien 1 bassin ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : le temps est **supérieur** aux 8 h du robinet seul ✓
- **Erreur classique** : soustraire les temps,  $12 - 8 = 4$  h — absurde, puisque la fuite doit **ralentir** le remplissage ✓

- **Cas critique** : si la fuite vidait en 8 h aussi, le débit net serait **nul** et le bassin ne se remplirait **jamais** ✓
- **Cas d'une fuite plus rapide** : une fuite de 6 h donnerait un débit net négatif ( $\frac{1}{8} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{24}$ ) — le bassin se **viderait** ✓
- **Formule** :  $t = \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{ab}{b-a}$ , soit  $\frac{96}{4} = 24$  h ✓
- **Contrôle** :  $\frac{8 \times 12}{12-8} = 24$  ✓
- **Avec un second robinet de 6 h** : le débit net serait  $\frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{3+4-2}{24} = \frac{5}{24}$ , soit 4,8 h ✓

**Réponse.** 24 h (débit net de  $\frac{1}{24}$  bassin par heure).

### Correction de l'exercice 12 - Problème avec système à deux inconnues

- **Inconnues** :  $p$  poules et  $l$  lapins.
- **Système** :

$$\begin{cases} p + l = 32 \\ 2p + 4l = 94 \end{cases}$$

- **Simplification de la seconde** :  $p + 2l = 47$ .
- **Soustraction** :  $(p + 2l) - (p + l) = 47 - 32$ , donc  

$$l = 15 \quad p = 17$$
- **Vérifications** :  $17 + 15 = 32$  ✓ et  $2 \times 17 + 4 \times 15 = 34 + 60 = 94$  ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : des effectifs **entiers positifs** ✓
- **Méthode astucieuse** : si tous étaient des poules, il y aurait 64 pattes ; l'excédent de 30 pattes se répartit à raison de 2 pattes par lapin, soit 15 lapins ✓
- **Contrôle** :  $\frac{94-64}{2} = 15$  ✓
- **Cas impossible** : avec 95 pattes, on aurait  $l = 15,5$  — un nombre de pattes **impair** est impossible, poules et lapins en ayant un nombre pair ✓
- **Autre cas impossible** : 70 pattes donneraient  $l = 3$  et  $p = 29$ , valide ; mais 60 pattes donneraient  $l = -2$  — impossible ✓
- **Encadrement du nombre de pattes** : entre  $2 \times 32 = 64$  (toutes poules) et  $4 \times 32 = 128$  (tous lapins) ✓
- **Cohérence** :  $94 \in [64; 128]$  ✓

**Réponse.** 17 poules et 15 lapins.

### Correction de l'exercice 13 - Problème de concentration

- **Sucre présent** :  $5 \times 0,60 = 3$  L — quantité **invariante** ✓
- **Inconnue** :  $x$  litres d'eau ajoutés.
- **Équation** :

$$\frac{3}{5+x} = 0,12$$

- **Résolution** :  $3 = 0,12(5+x) = 0,6 + 0,12x$ , donc  $0,12x = 2,4$  et  

$$x = 20$$
 L
- **Volume final** : 25 L ✓

- **Vérification** :  $\frac{3}{25} = 0,12$  ✓
- **Contrôle par les rapports** : la concentration est divisée par 5 ( $60 \rightarrow 12$ ), donc le volume est **multiplié par 5** ( $5 \rightarrow 25$  L) ✓
- **Relation** :  $c_1V_1 = c_2V_2$ , soit  $0,60 \times 5 = 0,12 \times 25 = 3$  ✓
- **Erreur classique** : écrire  $\frac{3}{x} = 0,12$  en oubliant le volume initial — cela donnerait  $x = 25$  L, soit 5 L de trop ✓
- **Pour atteindre 10 %** :  $V = \frac{3}{0,10} = 30$  L, donc 25 L d'eau ✓
- **Pour atteindre 20 %** :  $V = 15$  L, donc 10 L d'eau ✓
- **Concentration minimale atteignable** : elle tend vers 0 sans jamais l'atteindre, le sucre restant présent ✓

**Réponse.** 20 L d'eau (volume final de 25 L).

### Correction de l'exercice 14 - Problème d'optimisation

- **Notations** :  $x$  la largeur (deux côtés perpendiculaires au bâtiment),  $y$  la longueur le long du bâtiment.
- **Contrainte** :  $2x + y = 120$ , donc  $y = 120 - 2x$  avec  $0 < x < 60$ .
- **Aire** :  

$$A(x) = x(120 - 2x) = 120x - 2x^2$$
- **Forme canonique** :  $A(x) = -2(x^2 - 60x) = -2[(x - 30)^2 - 900]$ , soit  

$$A(x) = 1800 - 2(x - 30)^2$$
- **Maximum** : 1800 m<sup>2</sup>, atteint pour  $x = 30$  m ✓
- **Dimensions** : 30 m  $\times$  60 m ✓
- **Vérifications** :  $2 \times 30 + 60 = 120$  m de grillage ✓ et  $30 \times 60 = 1800$  m<sup>2</sup> ✓
- **Contrôles voisins** :  $A(25) = 25 \times 70 = 1750$  m<sup>2</sup> et  $A(35) = 35 \times 50 = 1750$  m<sup>2</sup> ✓ — symétriques et inférieurs
- **Propriété** : la longueur vaut le **double** de la largeur ✓
- **Comparaison sans bâtiment** : 120 m donneraient un carré de 30 m de côté, soit 900 m<sup>2</sup> — la **moitié** ✓
- **Formule générale** : avec  $P$  mètres et un mur, l'aire maximale vaut  $\frac{P^2}{8}$  ✓
- **Contrôle** :  $\frac{14\,400}{8} = 1800$  ✓

**Réponse.** 1800 m<sup>2</sup>, pour un enclos de 30 m  $\times$  60 m.

### Correction de l'exercice 15 - Problème avec inéquation double

- **Encadrement** :  

$$500 \leq 25n - 750 \leq 900$$
- **Ajout de 750** :  $1250 \leq 25n \leq 1650$ .
- **Division par 25 > 0** :  

$$50 \leq n \leq 66$$
- **Réponse** : entre 50 et 66 pièces ✓
- **Vérifications** :  $B(50) = 1250 - 750 = 500$  € ✓ et  $B(66) = 1650 - 750 = 900$  € ✓
- **Contrôle** :  $B(49) = 475$  € < 500 € ✓ et  $B(67) = 925$  € > 900 € ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : des effectifs **entiers** ✓

- **Nombre de possibilités** :  $66 - 50 + 1 = 17$  valeurs ✓
- **Seuil de rentabilité** :  $B(n) = 0$  donne  $n = 30$  pièces ✓
- **Marge unitaire** : 25 € par pièce ✓
- **Interprétation des 750 €** : ce sont les frais fixes, amortis au bout de 30 pièces ✓
- **Bénéfice maximal atteignable** : il dépend de la capacité de production, non fixée ici  
— le modèle affine n'a pas de maximum ✓

**Réponse.** Entre 50 et 66 pièces (soit 17 valeurs possibles).

### Correction de l'exercice 16 - Problème de proportions

- **Parts** : 4 parts de filles pour 7 parts de garçons, soit 11 parts au total.
- **Valeur d'une part** :  $\frac{33}{11} = 3$  élèves ✓
- **Répartition** :  
$$4 \times 3 = 12 \text{ filles} \quad 7 \times 3 = 21 \text{ garçons}$$
- **Vérifications** :  $12 + 21 = 33$  ✓ et  $\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$  ✓
- **Contrôle de la simplification** :  $\frac{12}{21} = \frac{4 \times 3}{7 \times 3} = \frac{4}{7}$  ✓
- **Méthode par équation** : avec  $f$  filles,  $\frac{f}{33-f} = \frac{4}{7}$  donne  $7f = 4(33 - f)$ , soit  $11f = 132$   
et  $f = 12$  ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : des effectifs entiers positifs ✓
- **Condition de divisibilité** : l'effectif total doit être un **multiple de 11** ✓
- **Cas impossible** : avec 30 élèves, on aurait  $f = \frac{120}{11} \approx 10,9$  — non entier, donc ce rapport est impossible ✓
- **Pourcentages** :  $\frac{4}{11} \approx 36,4\%$  de filles et  $\frac{7}{11} \approx 63,6\%$  de garçons ✓
- **Contrôle** : la somme vaut 100 % ✓

**Réponse.** 12 filles et 21 garçons (une part valant 3 élèves).

### Correction de l'exercice 17 - Synthèse : problème à plusieurs étapes

a) **Coût d'achat** :

$$80 \times 15 = 1200 \text{ €}$$

b) **Prix de vente unitaire** :  $15 \times 1,40 = 21 \text{ €}$ .

— **Recette des 60 premiers** :

$$60 \times 21 = 1260 \text{ €}$$

— **Contrôle** : la marge unitaire vaut 6 €, soit 360 € sur 60 articles ✓

c) **Recette des 20 soldés** :  $20 \times 12 = 240 \text{ €}$ .

— **Recette totale** :  $1260 + 240 = 1500 \text{ €}$  ✓

— **Bénéfice** :

$$1500 - 1200 = 300 \text{ €}$$

— **Contrôle par article** : +6 € sur 60 articles (+360 €) et -3 € sur 20 articles (-60 €), soit 300 € ✓

— **Taux de marge global** :  $\frac{300}{1200} = 25\%$  ✓

d) **Question.** Le bénéfice vaut **déjà** 300 € avec un prix de solde de 12 € — le prix demandé est donc exactement 12 € ✓

- **Vérification générale** : avec un prix de solde  $p$ , le bénéfice vaut  $1260 + 20p - 1200 = 60 + 20p$ .
- **Équation** :  $60 + 20p = 300$  donne  $p = 12$  € ✓
- **Contrôle** : le calcul confirme le résultat de la question c) ✓
- **Prix de solde pour l'équilibre** (0 € de bénéfice) :  $20p = -60$ , soit  $p = -3$  € — **impossible**, ce qui signifie que le commerçant est bénéficiaire **même en donnant** les 20 articles ✓
- **Vérification** : avec  $p = 0$ , le bénéfice vaudrait 60 € ✓
- **Prix de solde pour 500 €** :  $20p = 440$ , soit  $p = 22$  € — supérieur au prix de vente normal, donc irréaliste ✓
- **Leçon** : les 60 premières ventes suffisent à couvrir tout l'achat ( $1260 > 1200$ ), ce qui sécurise l'opération ✓

**Réponse.** a) 1200 € · b) 21 € l'unité, 1260 € · c) 1500 € de recette et 300 € de bénéfice · d) 12 €, le prix déjà pratiqué.