MATHÉMATIQUES

Calcul littéral et équations

Seconde

Développer • Factoriser • Identités remarquables • Expressions fractionnaires
Inégalités • Comparaisons • Équations • Produit
nul • Quotient • Tableau de signes • Inéquations

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de mathématiques de seconde générale et technologique** (arrêté du 26 février 2026, BO n°14 du 2 avril 2026, rentrée 2026), partie « Nombres et calculs, algèbre », section « Algèbre ». Il couvre :

- calculs sur des expressions algébriques, en particulier fractionnaires ; choisir la forme (développée réduite, factorisée) adaptée au problème ;
- exprimer une variable en fonction des autres ($U = RI$, $V = \pi r^2 h$, $ax + by = c$…) ;
- somme d'inégalités, produit d'une inégalité par un réel positif ou négatif ;
- comparer deux quantités par leur différence ou par leur rapport, et interpréter ;
- équations $ax + b = cx + d$, $x^2 = a$, équation produit nul, équation quotient ;
- signe d'un produit $A(x)B(x)$ et d'un quotient $\frac{A(x)}{B(x)}$, inéquations ; modéliser un problème par une inéquation ;
- **algorithme** : première puissance d'un nombre positif qui dépasse une valeur donnée.

Les règles sur les puissances sont rappelées dans le chapitre « Nombres et calculs », celles sur les racines carrées dans le chapitre « Fonction racine carrée ».

Objectif : transformer une expression algébrique pour choisir la forme adaptée, comparer deux quantités, résoudre équations et inéquations, et modéliser un problème.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Expressions algébriques **3**
1.1 Vocabulaire 3

2 Développer **3**

3 Factoriser **4**

4 Choisir la forme adaptée **5**

5 Expressions fractionnaires **5**

6 Exprimer une variable en fonction des autres **6**

7 Inégalités et comparaisons **6**

8 Équations **8**
8.1 Équations du premier degré 8
8.2 Équation $x^2 = a$ 8
8.3 Équation produit nul 8
8.4 Équation quotient 9

9 Signe d'un produit, d'un quotient et inéquations **9**
9.1 Modéliser par une inéquation 11

10 Erreurs classiques **11**

11 Fiche de synthèse **12**

12 Exercices d'application **12**

13 Corrigés des exercices **13**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Expressions algébriques

1.1. Vocabulaire

Somme, produit, forme développée, forme factorisée

— Une expression est une **somme** (ou différence) si la dernière opération à effectuer est une addition (ou une soustraction) ; ses morceaux sont les **termes**.

— C'est un **produit** si la dernière opération est une multiplication ; ses morceaux sont les **facteurs**.

— **Développer**, c'est transformer un produit en somme ; **réduire**, c'est regrouper les termes semblables ; **factoriser**, c'est transformer une somme en produit.

Repérer la dernière opération

$(x+2)(3x-1)$ est un produit de deux facteurs. $(x+2)^2-9$ est une différence de deux termes. $2x(x-1)+5$ est une somme, même si elle contient un produit.

Règles élémentaires

Pour tous réels a, b, x et $c \neq 0$:

$$-(a+b) = -a-b \qquad -(a-b) = b-a \qquad (-1)\times a = -a \qquad \frac{x}{c} = \frac{1}{c}x \qquad \frac{ab}{c} = a\times\frac{b}{c}.$$

Supprimer des parenthèses précédées d'un signe moins

$$5-(2x-3) = 5-2x+3 = 8-2x \qquad \text{et} \qquad \frac{3x-6}{3} = \frac{1}{3}(3x-6) = x-2.$$

2. Développer

Distributivité

Pour tous réels k, a, b, c, d :

$$k(a+b) = ka+kb \qquad (a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd.$$

Double distributivité

$(2x-3)(x+4) = 2x^2+8x-3x-12 = 2x^2+5x-12.$

Identités remarquables

Pour tous réels a et b :

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \qquad (a+b)(a-b) = a^2-b^2}$$

Démonstration. Par double distributivité : $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+2ab+b^2$. On obtient la deuxième en remplaçant b par $-b$. Enfin $(a+b)(a-b) = a^2-ab+ba-b^2 = a^2-b^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Développer avec une identité

- $(3x+2)^2 = (3x)^2 + 2\times 3x \times 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$;
- $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$;
- $(2x+7)(2x-7) = (2x)^2 - 7^2 = 4x^2 - 49$;
- calcul mental : $99^2 = (100-1)^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9\,801$ et $51 \times 49 = 50^2 - 1^2 = 2\,499$.

Le carré d'une somme

$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$: avec $a=3$ et $b=4$, $(3+4)^2 = 49$ alors que $3^2 + 4^2 = 25$. Il manque le double produit $2ab = 24$. De même, $(3x)^2 = 9x^2$ et non $3x^2$.

Pour aller plus loin

En développant de la même façon, on obtient $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ et $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (on écrit $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$).

3. Factoriser

Stratégie de factorisation

1. Chercher un **facteur commun** à tous les termes (un nombre, une lettre, une parenthèse) et appliquer $ka + kb = k(a+b)$.
2. Sinon, reconnaître une **identité remarquable** : $a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$ ou surtout une **différence de deux carrés** $a^2 - b^2$.
3. Sinon, faire apparaître un facteur commun « caché » (en factorisant un des termes).
4. Contrôler en redéveloppant, ou en testant une valeur de x.

Facteur commun

- $6x^2 - 9x = 3x \times 2x - 3x \times 3 = 3x(2x-3)$;
- $(x+1)(2x-5) - (x+1)(x+3) = (x+1)\big[(2x-5) - (x+3)\big] = (x+1)(x-8)$.

Attention aux crochets : le signe moins porte sur toute la parenthèse $(x+3)$.

Identités remarquables

- $9x^2 - 12x + 4 = (3x)^2 - 2\times 3x \times 2 + 2^2 = (3x-2)^2$;
- $x^2 - 36 = (x-6)(x+6)$;
- $(x-3)^2 - 16 = \big[(x-3)-4\big]\big[(x-3)+4\big] = (x-7)(x+1)$.

Facteur commun caché

$(2x-6) + (x-3)(x+5) = 2(x-3) + (x-3)(x+5) = (x-3)(2+x+5) = (x-3)(x+7)$.
Contrôle avec $x=0$: à gauche $-6 + (-3)\times 5 = -21$, à droite $(-3)\times 7 = -21$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Une somme de deux carrés ne se factorise pas

x^2+36 ne se factorise pas comme x^2-36. Et un test sur une valeur ne prouve pas une égalité : il ne sert qu'à détecter une erreur.

4. Choisir la forme adaptée

Quelle forme pour quelle question ?

- **Forme développée réduite** : calculer une image, résoudre $f(x) =$ « le terme constant », comparer à une autre expression développée.
- **Forme factorisée** : résoudre $f(x)=0$, étudier le signe de $f(x)$.
- Une forme comme $(x-1)^2-4$ (un carré plus une constante) permet de voir un extremum.

On démontre d'abord que les formes sont égales, en développant chacune.

Trois formes d'une même expression

Soit $f(x)=(x-1)^2-4$. En développant : $f(x)=x^2-2x+1-4=x^2-2x-3$. Avec une différence de deux carrés : $f(x)=(x-1-2)(x-1+2)=(x-3)(x+1)$.

- $f(0)$: la forme développée donne $f(0)=-3$ immédiatement.
- $f(x)=0$: la forme factorisée donne $x=3$ ou $x=-1$.
- $f(x)=-3$: la forme développée donne $x^2-2x=0$, soit $x(x-2)=0$, donc $x=0$ ou $x=2$.
- Minimum : $(x-1)^2\geq 0$, donc $f(x)\geq -4$, avec égalité pour $x=1$. Le minimum de f est -4.

5. Expressions fractionnaires

Calculer avec des quotients

Pour des expressions A, B, C, D avec $B\neq 0$ et $D\neq 0$:

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD+BC}{BD} \qquad \frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD} \qquad \frac{AD}{BD}=\frac{A}{B}.$$

Une expression $\frac{A(x)}{B(x)}$ n'est définie que si $B(x)\neq 0$: les réels qui annulent $B(x)$ sont les **valeurs interdites**.

Réduire au même dénominateur

Pour $x\neq 0$ et $x\neq -1$:

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}=\frac{(x+1)+2x}{x(x+1)}=\frac{3x+1}{x(x+1)}.$$

Pour $x\neq 1$: $\quad 3-\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{3(x-1)-2}{x-1}=\dfrac{3x-5}{x-1}.$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

On ne simplifie que des facteurs

$\dfrac{x+3}{x} \neq 3$: on ne « barre » pas un terme d'une somme. En revanche, $\dfrac{x(x+3)}{x} = x+3$ pour $x \neq 0$, car x est un facteur du numérateur.

6. Exprimer une variable en fonction des autres

Isoler une variable

On traite la formule comme une équation dont l'inconnue est la variable cherchée : on applique les mêmes opérations aux deux membres, en vérifiant qu'on ne divise jamais par zéro et, pour une racine carrée, que la quantité est positive.

Formules de physique et de géométrie

- Loi d'Ohm $U = RI$: pour $R \neq 0$, $I = \dfrac{U}{R}$. Vitesse $d = vt$: pour $v \neq 0$, $t = \dfrac{d}{v}$.
- Volume d'un cylindre $V = \pi r^2 h$: $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$, et comme $r > 0$, $r = \sqrt{\dfrac{V}{\pi h}}$.
- Relation du premier degré $3x + 2y = 12$: $2y = 12 - 3x$, donc $y = 6 - \dfrac{3}{2}x$. On reconnaît une fonction affine de x (une droite).

7. Inégalités et comparaisons

Opérations sur les inégalités

Pour tous réels a, b, c, d :

- **addition** : si $a < b$, alors $a + c < b + c$;
- **somme** : si $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$;
- **produit par un réel positif** : si $a < b$ et $k > 0$, alors $ka < kb$ (le sens est conservé) ;
- **produit par un réel négatif** : si $a < b$ et $k < 0$, alors $ka > kb$ (le sens est **inversé**).

Ces règles valent aussi pour $\leq$.

Démonstration. **Somme** : $(b + d) - (a + c) = (b - a) + (d - c)$ est une somme de deux réels strictement positifs, donc est strictement positif. **Produit** : $kb - ka = k(b - a)$; $b - a > 0$, donc ce produit a le signe de k. C'est le sens de variation de la fonction linéaire $x \mapsto kx$: croissante si $k > 0$, décroissante si $k < 0$.

Encadrer une expression

On sait que $2 \leq x \leq 5$ et $1 \leq y \leq 3$.

- $-3x + 1$: en multipliant par $-3 < 0$, $-15 \leq -3x \leq -6$, puis $-14 \leq -3x + 1 \leq -5$.
- $x + y$: en ajoutant membre à membre, $3 \leq x + y \leq 8$.
- $x - y$: on encadre d'abord $-y$, soit $-3 \leq -y \leq -1$, puis on ajoute : $-1 \leq x - y \leq 4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

On ne soustrait pas des inégalités

De $2 \leq x \leq 5$ et $1 \leq y \leq 3$, on ne déduit **pas** $1 \leq x - y \leq 2$: avec $x = 2$ et $y = 3$, $x - y = -1$. Pour une différence, on passe par l'opposé ; pour un quotient de positifs, par l'inverse (qui inverse aussi le sens).

Comparer deux quantités

— **Par la différence** : on étudie le signe de $A - B$. Si $A - B > 0$, alors $A > B$. L'écart $A - B$ s'interprète comme une **variation additive** (« A dépasse B de … »).

— **Par le rapport** (pour $A > 0$ et $B > 0$) : on compare $\dfrac{A}{B}$ à 1. Le rapport s'interprète comme une **variation multiplicative** (« A vaut 1,25 fois B », « 25 % de plus »).

Deux tarifs

Un abonnement coûte 120 € chez A et 150 € chez B. Différence : $150 - 120 = 30$, B coûte 30 € de plus. Rapport : $\dfrac{150}{120} = 1{,}25$, B coûte 25 % de plus que A ; mais $\dfrac{120}{150} = 0{,}8$, donc A coûte 20 % de moins que B. Le pourcentage dépend de la quantité de référence.

Comparer par la différence, en fonction de x

Comparer $(x+1)^2$ et x^2+1 : $(x+1)^2 - (x^2+1) = 2x$. Donc $(x+1)^2 > x^2+1$ si $x > 0$, égalité si $x = 0$, et $(x+1)^2 < x^2+1$ si $x < 0$.

Pour aller plus loin : moyennes arithmétique et géométrique

Pour $a > 0$ et $b > 0$: $\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \dfrac{a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b}{2} = \dfrac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0$, donc $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$, avec égalité si et seulement si $a = b$.

Algorithme : première puissance qui dépasse un seuil

Pour $q > 1$, la fonction suivante renvoie le plus petit entier n tel que $q^n > s$:

```
def premiere_puissance(q, s):
    n = 0
    p = 1
    while p <= s:
        p = p * q
        n = n + 1
    return n
```

`premiere_puissance(1.05, 2)` renvoie 15 : $1{,}05^{14} \approx 1{,}980$ et $1{,}05^{15} \approx 2{,}079$. Un capital placé à 5 % par an double donc au bout de 15 ans. Pour $0 < q < 1$ et un seuil $s < 1$, on remplace la condition par `p >= s` : avec $q = 0{,}9$ et $s = 0{,}5$, on obtient 7 ($0{,}9^6 \approx 0{,}531$ et $0{,}9^7 \approx 0{,}478$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

8. Équations

8.1. Équations du premier degré

Équations équivalentes

On obtient une équation qui a les mêmes solutions en ajoutant (ou soustrayant) un même nombre aux deux membres, ou en les multipliant (ou divisant) par un même nombre **non nul**.

Équation $ax + b = 0$

Si $a \neq 0$, l'équation $ax + b = 0$ a une unique solution : $x = -\dfrac{b}{a}$.

Équation $ax + b = cx + d$

$5x - 3 = 2x + 9 \iff 3x = 12 \iff x = 4$. Contrôle : $5 \times 4 - 3 = 17$ et $2 \times 4 + 9 = 17$. $S = \{4\}$.

Quand les x disparaissent

$2(x + 3) = 2x + 5 \iff 6 = 5$: impossible, $S = \varnothing$. $2(x + 3) = 2x + 6 \iff 6 = 6$: toujours vrai, $S = \mathbb{R}$.

8.2. Équation $x^2 = a$

Solutions de $x^2 = a$

- si $a > 0$: deux solutions, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$;
- si $a = 0$: une solution, 0 ;
- si $a < 0$: aucune solution (un carré est positif).

$x^2 = 7 \iff x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}$. $x^2 = -4$ n'a pas de solution. $(x-3)^2 = 16 \iff x-3 = 4$ ou $x - 3 = -4 \iff x = 7$ ou $x = -1$ (on retrouve la factorisation de la section 3).

8.3. Équation produit nul

Produit nul

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul :

$$A(x) \times B(x) = 0 \iff A(x) = 0 \text{ ou } B(x) = 0.$$

Résoudre une équation qui n'est pas du premier degré

1. Tout ramener dans un membre pour avoir « $= 0$ » ;
2. factoriser ce membre ;
3. appliquer le produit nul et résoudre chaque équation du premier degré.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $(2x-1)(x+3)=0 \iff 2x-1=0$ ou $x+3=0 \iff x=\dfrac{1}{2}$ ou $x=-3$.

— $x^2=5x \iff x^2-5x=0 \iff x(x-5)=0 \iff x=0$ ou $x=5$.

Ne pas diviser par l'inconnue

Diviser $x^2=5x$ par x donne $x=5$ et **perd la solution** $x=0$: on ne divise que par un nombre dont on sait qu'il est non nul.

8.4. Équation quotient

Quotient nul, quotient égal à k

— $\dfrac{A(x)}{B(x)}=0 \iff A(x)=0$ et $B(x)\neq 0$.

— Pour résoudre $\dfrac{A(x)}{B(x)}=k$, on écarte les valeurs interdites, puis on résout $A(x)=kB(x)$.

— $\dfrac{2x+1}{x-3}=0$: valeur interdite 3 ; $2x+1=0 \iff x=-\dfrac{1}{2}$, qui n'est pas interdite. $S=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

— $\dfrac{x^2-4}{x-2}=0$: valeur interdite 2 ; $x^2-4=0 \iff x=2$ ou $x=-2$. On écarte 2 : $S=\{-2\}$.

— $\dfrac{x+5}{x-1}=3$: pour $x\neq 1$, $x+5=3(x-1) \iff x+5=3x-3 \iff 8=2x \iff x=4$. Contrôle : $\dfrac{9}{3}=3$. $S=\{4\}$.

9. Signe d'un produit, d'un quotient et inéquations

Dresser un tableau de signes

1. Écrire l'expression comme un produit ou un quotient de facteurs du premier degré ;
2. chercher la valeur qui annule chaque facteur et les ranger dans l'ordre croissant sur la première ligne ;
3. une ligne par facteur : $mx+p$ a le signe de m à droite de sa racine, le signe contraire à gauche ;
4. dernière ligne : règle des signes ; un 0 là où un facteur du numérateur s'annule, une double barre aux valeurs interdites.

Signe de $P(x)=(x+3)(2-x)$

$x+3=0 \iff x=-3$; $2-x=0 \iff x=2$ (pente -1 : positif avant 2).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'inéquation $(x+3)(2-x) \geq 0$ a pour ensemble de solutions $S = [-3\,;2]$.

Signe de $Q(x) = \frac{2x-1}{x+2}$

$2x-1=0 \iff x=\frac{1}{2}$; $x+2=0 \iff x=-2$, valeur interdite.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$Q(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

L'inéquation $Q(x) < 0$ a pour ensemble de solutions $S = \left]-2\,;\frac{1}{2}\right[$ (-2 est exclu car interdit, $\frac{1}{2}$ car Q y est nul).

Inéquation qui n'est pas « comparée à zéro »

On ne multiplie pas les deux membres par une expression dont on ignore le signe. On fait tout passer dans un membre, on réduit au même dénominateur, puis on étudie le signe.

Résoudre $\frac{3x}{x-1} \geq 2$

Pour $x \neq 1$:

$$\frac{3x}{x-1} - 2 = \frac{3x-2(x-1)}{x-1} = \frac{x+2}{x-1}.$$

Le numérateur s'annule en -2, le dénominateur en 1 ; les deux ont une pente positive.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+2}{x-1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

$S =]-\infty\,;-2] \cup]1\,;+\infty[$. Contrôle : pour $x=2$, $\frac{6}{1} = 6 \geq 2$; pour $x=0$, $0 \geq 2$ est faux, et $0 \notin S$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Multiplier par une expression de signe inconnu

« $\dfrac{3x}{x-1} \geq 2 \iff 3x \geq 2(x-1)$ » est faux : c'est vrai seulement quand $x-1>0$. Cette erreur donnerait $x \geq -2$, qui contient à tort $x=0$.

9.1. Modéliser par une inéquation

Location de vélos

Une agence loue un vélo 12 € la journée ; une autre demande 30 € d'inscription puis 7 € par jour. Pour n jours, la première coûte $12n$ et la seconde $30+7n$. La seconde est strictement moins chère quand $30+7n<12n \iff 30<5n \iff n>6$: à partir de 7 jours. Pour 6 jours, les deux coûtent 72 €.

Un rectangle d'aire minimale

Un rectangle a pour côtés x et $x+4$ (en cm, $x>0$). Son aire dépasse 45 cm^2 quand $x(x+4)>45 \iff x^2+4x-45>0$. On vérifie en développant que $x^2+4x-45=(x-5)(x+9)$. Pour $x>0$, $x+9>0$, donc le signe est celui de $x-5$: l'aire dépasse 45 cm^2 si et seulement si $x>5$.

10. Erreurs classiques

À éviter

- $(a+b)^2=a^2+b^2$: il manque le double produit.
- $-(x-3)=-x-3$: le signe moins change **tous** les signes, $-(x-3)=-x+3$.
- Diviser par x (ou par une expression) sans savoir qu'elle est non nulle : on perd des solutions.
- Oublier d'inverser le sens d'une inégalité en multipliant par un négatif.
- Soustraire deux encadrements membre à membre.
- Garder une valeur interdite dans l'ensemble des solutions d'une équation ou inéquation quotient.
- Écrire « $x=3$ ou $x=-1$ » pour une inéquation : la réponse est un intervalle ou une réunion d'intervalles.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

11. Fiche de synthèse

Identités	$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$; $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$
Factoriser	facteur commun, puis identité (différence de deux carrés), puis facteur caché ; contrôler
Forme adaptée	factorisée pour $f(x)=0$ et le signe ; développée pour les images
Fractions	$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD+BC}{BD}$; valeurs interdites : $B(x)=0$
Inégalités	$\times k>0$: même sens ; $\times k<0$: sens inversé ; on additionne, on ne soustrait pas
Comparer	signe de $A-B$ (additif) ; $\frac{A}{B}$ comparé à 1 (multiplicatif, $A,B>0$)
Équations	$ax+b=0 \iff x=-\frac{b}{a}$; $x^2=a$: $\pm\sqrt{a}$ si $a>0$
Produit nul	$AB=0 \iff A=0$ ou $B=0$
Quotient	$\frac{A}{B}=0 \iff A=0$ et $B\neq 0$
Signe	tableau de signes : une ligne par facteur, double barre aux valeurs interdites

12. Exercices d'application

Exercice 1 – Développer et factoriser

1. Développer et réduire $A=(3x-2)^2-(x+1)(x-1)$.
2. Factoriser $B=4x^2-25$, $C=(x+2)(3x-1)+(x+2)^2$ et $D=x^2-8x+16$.

Exercice 2 – Choisir la forme

Soit $f(x)=(2x+1)^2-9$.

1. Montrer que $f(x)=4x^2+4x-8$, puis que $f(x)=4(x-1)(x+2)$.
2. En choisissant la forme adaptée, calculer $f(0)$, résoudre $f(x)=0$, puis $f(x)=-8$.

Exercice 3 – Inégalités

On sait que $-1\leq a\leq 2$ et $3\leq b\leq 4$. Encadrer $2a-5$, $a+b$, $a-b$ et $-\dfrac{b}{2}$.

Exercice 4 – Équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $4(x-2)=7x+1$; b) $(3x-6)(x+4)=0$; c) $x^2=3x$; d) $\dfrac{x-4}{2x+1}=0$; e) $\dfrac{2x+3}{x+1}=1$.

Exercice 5 – Signe et inéquations

1. Dresser le tableau de signes de $(1-2x)(x+4)$ et résoudre $(1-2x)(x+4)<0$.
2. Résoudre $\dfrac{x+1}{x-2}\leq 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Modéliser

Pour imprimer des affiches, un imprimeur demande 40 € de frais fixes puis 0,50 € par affiche ; un autre ne demande pas de frais fixes mais 1,30 € par affiche. À partir de combien d'affiches le premier est-il strictement moins cher ? Comparer ensuite les deux prix pour 100 affiches, par la différence puis par le rapport.

13. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé.

1. $A = (9x^2 - 12x + 4) - (x^2 - 1) = 8x^2 - 12x + 5$.
2. $B = (2x)^2 - 5^2 = (2x - 5)(2x + 5)$. $C = (x + 2)\big[(3x - 1) + (x + 2)\big] = (x + 2)(4x + 1)$. $D = x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2 = (x - 4)^2$.

Contrôle de C avec $x = 0$: $2 \times (-1) + 4 = 2$ et $2 \times 1 = 2$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé.

1. $(2x+1)^2-9 = 4x^2+4x+1-9 = 4x^2+4x-8$. Et $4(x-1)(x+2) = 4(x^2+x-2) = 4x^2+4x-8$: les trois formes sont égales.
2. Forme développée : $f(0) = -8$. Forme factorisée : $f(x) = 0 \iff x = 1$ ou $x = -2$. Forme développée : $f(x) = -8 \iff 4x^2 + 4x = 0 \iff 4x(x + 1) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -1$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $-2 \leq 2a \leq 4$, donc $-7 \leq 2a - 5 \leq -1$. En ajoutant : $2 \leq a + b \leq 6$. Comme $-4 \leq -b \leq -3$, on obtient $-5 \leq a - b \leq -1$. Enfin, en multipliant par $-\frac{1}{2} < 0$, le sens change : $-2 \leq -\dfrac{b}{2} \leq -\dfrac{3}{2}$.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. a) $4x - 8 = 7x + 1 \iff -9 = 3x \iff x = -3$. Contrôle : $4 \times (-5) = -20$ et $-21 + 1 = -20$. $S = \{-3\}$.
b) $3x - 6 = 0$ ou $x + 4 = 0$: $S = \{-4\,;2\}$.
c) $x^2 - 3x = 0 \iff x(x - 3) = 0$: $S = \{0\,;3\}$ (diviser par x aurait perdu 0).
d) Valeur interdite $-\frac{1}{2}$; $x - 4 = 0 \iff x = 4$, autorisé : $S = \{4\}$.
e) Pour $x \neq -1$: $2x + 3 = x + 1 \iff x = -2$, autorisé. Contrôle : $\dfrac{-1}{-1} = 1$. $S = \{-2\}$.

Corrigé de l'exercice 5

Corrigé.

1. $1 - 2x$ s'annule en $\frac{1}{2}$, positif avant (pente -2) ; $x + 4$ s'annule en -4, positif après.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

x	$-\infty$		-4		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$(1-2x)(x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S =]-\infty\,;-4[\cup]\frac{1}{2}\,;+\infty[$.

2. Pour $x \neq 2$: $\dfrac{x+1}{x-2} - 3 = \dfrac{x+1-3x+6}{x-2} = \dfrac{-2x+7}{x-2}$. Le numérateur s'annule en 3,5 (positif avant), le dénominateur en 2 (positif après). Le quotient est négatif sur $]-\infty\,;2[$, positif sur $]2\,;3{,}5[$, nul en 3,5, négatif après. $S =]-\infty\,;2[\cup [3{,}5\,;+\infty[$. Contrôle : pour $x = 0$, $-\frac{1}{2} \leq 3$; pour $x = 3$, $\frac{4}{1} = 4 > 3$, et $3 \notin S$.

Corrigé de l'exercice 6

Corrigé. Pour n affiches : $40 + 0{,}5n$ et $1{,}3n$. $40 + 0{,}5n < 1{,}3n \iff 40 < 0{,}8n \iff n > 50$: le premier est strictement moins cher à partir de 51 affiches (pour 50, les deux coûtent 65 €). Pour 100 affiches : 90 € et 130 €. Différence : $130 - 90 = 40$ € d'économie. Rapport : $\dfrac{90}{130} \approx 0{,}692$, le premier coûte environ 30,8 % de moins que le second.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).