

Plaquette 4 - Droites et fonctions affines : lectures et modélisations

Droites du plan — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Deux langages pour un seul objet.

Géométrie	Fonctions
droite $y = mx + p$	fonction affine $f(x) = mx + p$
pente m	coefficient directeur, taux d'accroissement
ordonnée à l'origine p	$f(0) = p$
point $(a ; b)$ sur la droite	$f(a) = b$
intersection avec l'axe des abscisses	solution de $f(x) = 0$

Le taux d'accroissement. Pour deux points distincts de la droite :

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

C'est la variation de y **pour une augmentation de 1** de x .

Signe de la pente et sens de variation.

Pente	Fonction	Droite
$m > 0$	croissante	montante
$m = 0$	constante	horizontale
$m < 0$	décroissante	descendante

Résoudre graphiquement. $f(x) = k$ se lit à l'intersection de la courbe et de la droite $y = k$; $f(x) > g(x)$ se lit là où la courbe de f est **au-dessus** de celle de g .

Modéliser une situation linéaire. On repère la **valeur initiale** (c'est p) et le **taux de variation** (c'est m), puis on écrit $f(x) = mx + p$. On précise toujours le **domaine** de validité : un modèle affine ne vaut jamais sur $\mathbb{R}$ tout entier dans un problème concret.

Comparer deux tarifs. On résout $f(x) = g(x)$ pour trouver le point de bascule, puis on conclut par un tableau de comparaison de part et d'autre.

Correction de l'exercice 1 - Du graphique à l'expression

- **Ordonnée à l'origine** : le point $(0 ; -3)$ donne $p = -3$ ✓
- **Coefficient directeur** : $m = \frac{5 - (-3)}{4 - 0} = \frac{8}{4} = 2$ ✓
- **Expression** :

$$f(x) = 2x - 3$$

- **Contrôle en 0** : $f(0) = -3$ ✓
- **Contrôle en 4** : $f(4) = 8 - 3 = 5$ ✓
- **Image de 10** : $f(10) = 20 - 3 = 17$ ✓
- **Antécédent de 0** : on résout $2x - 3 = 0$ ✓

- **Résolution** : $x = 1,5$ ✓
- **Contrôle** : $f(1,5) = 3 - 3 = 0$ ✓
- **Interprétation géométrique** : la droite coupe l'axe des abscisses en $(1,5; 0)$ ✓
- **Sens de variation** : $m = 2 > 0$, la fonction est **croissante** ✓
- **Lecture du taux** : quand x augmente de 1, $f(x)$ augmente de 2 ✓
- **Contrôle** : $f(5) - f(4) = 7 - 5 = 2$ ✓
- **Image de -3** : $f(-3) = -6 - 3 = -9$ ✓
- **Antécédent de 17** : $2x - 3 = 17$ donne $x = 10$ ✓
- **Cohérence** : c'est bien réciproque de l'image calculée plus haut ✓

Réponse. $f(x) = 2x - 3$; $f(10) = 17$ et l'antécédent de 0 est 1,5.

Correction de l'exercice 2 - Droite par deux points quelconques

- **Coefficient directeur** : $m = \frac{-8 - 7}{3 - (-2)} = \frac{-15}{5} = -3$ ✓
- **Forme** : $f(x) = -3x + p$ ✓
- **Détermination de p** : $f(-2) = 6 + p = 7$ ✓
- **Résolution** : $p = 1$ ✓
- **Expression** :

$$f(x) = -3x + 1$$

- **Contrôle en -2** : $6 + 1 = 7$ ✓
- **Contrôle en 3** : $-9 + 1 = -8$ ✓
- **Sens de variation** : $m = -3 < 0$, la fonction est **décroissante** ✓
- **Contrôle** : $7 > -8$ alors que $-2 < 3$ ✓
- **Image de 0** : $f(0) = 1$ ✓
- **Antécédent de 0** : $-3x + 1 = 0$, donc $x = \frac{1}{3}$ ✓
- **Contrôle** : $f\left(\frac{1}{3}\right) = -1 + 1 = 0$ ✓
- **Signe de f** : positif avant $\frac{1}{3}$, négatif après ✓
- **Contrôles** : $f(0) = 1 > 0$ ✓ et $f(1) = -2 < 0$ ✓
- **Équation cartésienne de la droite** : $3x + y - 1 = 0$ ✓
- **Contrôle en $(3; -8)$** : $9 - 8 - 1 = 0$ ✓

Réponse. $f(x) = -3x + 1$.

Correction de l'exercice 3 - Deux tarifs de location

- **Fonction du loueur A** : $f(x) = 0,45x$ ✓
- **Fonction du loueur B** : $g(x) = 0,2x + 35$ ✓
- **Égalité** : $0,45x = 0,2x + 35$ ✓
- **Résolution** : $0,25x = 35$, donc $x = 140$ km ✓
- **Coût commun** : $0,45 \times 140 = 63$ € ✓
- **Contrôle** : $0,2 \times 140 + 35 = 28 + 35 = 63$ € ✓
- **Conclusion** :

A est moins cher jusqu'à 140 km, B au-delà

- **Contrôle pour 100 km** : 45 € contre 55 € ✓
- **Contrôle pour 200 km** : 90 € contre 75 € ✓

- **Économie pour 500 km** : $225 - 135 = 90$ € en faveur de B ✓
- **Interprétation des pentes** : 0,45 contre 0,20, B est moins chère au kilomètre ✓
- **Interprétation des ordonnées à l'origine** : 0 contre 35, A n'a pas de frais fixes ✓
- **Compromis** : B amortit son forfait au bout de 140 km ✓
- **Distance où B coûte la moitié de A** : $0,2x + 35 = 0,225x$, donc $0,025x = 35$ et $x = 1400$ km ✓
- **Contrôle** : $0,45 \times 1400 = 630$ € et $0,2 \times 1400 + 35 = 315$ € ✓
- **Cohérence** : 315 est bien la moitié de 630 ✓

Réponse. Égalité à 140 km (pour 63 €) : A est moins cher en dessous, B au-delà.

Correction de l'exercice 4 - Remplissage d'une cuve

- **Valeur initiale** : 120 L, c'est l'ordonnée à l'origine ✓
- **Taux** : +18 L par minute, c'est le coefficient directeur ✓
- **Expression** :

$$V(t) = 18t + 120$$
- **Domaine de validité** : jusqu'au remplissage complet ✓
- **Condition** : $18t + 120 = 600$ ✓
- **Résolution** : $18t = 480$, donc $t = \frac{480}{18} = \frac{80}{3} \approx 26,67$ min ✓
- **Conversion** : environ 26 min 40 s ✓
- **Contrôle** : $18 \times \frac{80}{3} + 120 = 480 + 120 = 600$ L ✓
- **Domaine** : $\left[0; \frac{80}{3}\right]$ ✓
- **Volume à 10 min** : $180 + 120 = 300$ L ✓
- **Volume à 20 min** : $360 + 120 = 480$ L ✓
- **Temps pour atteindre 400 L** : $18t = 280$, donc $t = \frac{140}{9} \approx 15,56$ min ✓
- **Contrôle** : $18 \times \frac{140}{9} + 120 = 280 + 120 = 400$ L ✓
- **Mi-remplissage** : 300 L atteints à 10 min ✓
- **Remarque sur la non-proportionnalité** : la moitié du volume n'est pas atteinte à la moitié du temps, à cause des 120 L initiaux ✓
- **Contrôle** : à 13,33 min (la moitié de 26,67), on a $240 + 120 = 360$ L, soit plus de la moitié ✓

Réponse. $V(t) = 18t + 120$, cuve pleine après $\frac{80}{3} \approx 26,67$ min (environ 26 min 40 s).

Correction de l'exercice 5 - Conversion de températures

- **Ordonnée à l'origine** : $f(0) = 32$ ✓
- **Coefficient directeur** : $m = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = 1,8$ ✓
- **Formule** :

$$F(c) = 1,8c + 32$$

- **Contrôle en 0** : 32 ✓
- **Contrôle en 100** : $180 + 32 = 212$ ✓
- **Température égale dans les deux unités** : on résout $F(c) = c$ ✓
- **Équation** : $1,8c + 32 = c$ ✓
- **Résolution** : $0,8c = -32$, donc $c = -40$ ✓

— **Réponse :**

$$-40\text{ }^{\circ}\text{C} = -40\text{ }^{\circ}\text{F}$$

- **Contrôle** : $1,8 \times (-40) + 32 = -72 + 32 = -40$ ✓
- **Conversion de $20\text{ }^{\circ}\text{C}$** : $36 + 32 = 68\text{ }^{\circ}\text{F}$ ✓
- **Conversion de $37\text{ }^{\circ}\text{C}$** : $66,6 + 32 = 98,6\text{ }^{\circ}\text{F}$ ✓
- **Cohérence** : c'est bien la température corporelle en Fahrenheit ✓
- **Formule inverse** : $c = \frac{F - 32}{1,8}$ ✓
- **Contrôle pour $100\text{ }^{\circ}\text{F}$** : $\frac{68}{1,8} \approx 37,78\text{ }^{\circ}\text{C}$ ✓
- **Astuce de calcul mental** : doubler et ajouter 30 donne une approximation ✓
- **Contrôle pour $20\text{ }^{\circ}\text{C}$** : $40 + 30 = 70$ contre 68 réels, soit 2 degrés d'écart ✓

Réponse. $F(c) = 1,8c + 32$, et $-40\text{ }^{\circ}\text{C} = -40\text{ }^{\circ}\text{F}$.

Correction de l'exercice 6 - Résoudre graphiquement

- **Première équation** : $2x - 1 = -x + 8$ ✓
- **Résolution** : $3x = 9$, donc $x = 3$ ✓
- **Valeur commune** : $f(3) = 5$ et $g(3) = 5$ ✓
- **Point d'intersection** : $(3; 5)$ ✓
- **Inéquation** $f(x) > g(x)$: $3x > 9$ ✓
- **Solution** :

$$x > 3 \quad \text{soit} \quad]3; +\infty[$$
- **Interprétation graphique** : la droite de f est au-dessus de celle de g à droite de 3 ✓
- **Contrôle en 4** : $f(4) = 7$ et $g(4) = 4$ ✓
- **Contrôle en 0** : $f(0) = -1$ et $g(0) = 8$ ✓
- **Cohérence** : f est bien en dessous à gauche de 3 ✓
- **Troisième condition** : $2x - 1 \leq 5$ ✓
- **Résolution** : $2x \leq 6$, donc $x \leq 3$ ✓
- **Solution** : $] - \infty; 3]$ ✓
- **Contrôle en 3** : $f(3) = 5$, la borne est bien incluse ✓
- **Coïncidence remarquable** : le seuil est le même, 3, pour les deux questions ✓
- **Explication** : la valeur commune en $x = 3$ vaut justement 5 ✓
- **Contrôle en 2** : $f(2) = 3 \leq 5$ ✓

Réponse. $x = 3$ · $f(x) > g(x)$ sur $]3; +\infty[$ · $f(x) \leq 5$ sur $] - \infty; 3]$.

Correction de l'exercice 7 - Refroidissement

- **Valeur initiale** : $180\text{ }^{\circ}\text{C}$ ✓
- **Taux** : $-6\text{ }^{\circ}\text{C}$ par minute ✓
- **Expression** :

$$T(t) = -6t + 180$$
- **Condition** : $-6t + 180 = 60$ ✓
- **Résolution** : $-6t = -120$, donc $t = 20\text{ min}$ ✓
- **Contrôle** : $-120 + 180 = 60\text{ }^{\circ}\text{C}$ ✓
- **Température à 10 min** : $-60 + 180 = 120\text{ }^{\circ}\text{C}$ ✓
- **Température à 25 min** : $-150 + 180 = 30\text{ }^{\circ}\text{C}$ ✓

- **Zéro de la fonction** : $t = 30$ min ✓
 - **Contrôle** : $-180 + 180 = 0$ °C ✓
 - **Au-delà de 30 min** : le modèle donnerait des températures **négatives** ✓
 - **Contrôle** : $T(40) = -240 + 180 = -60$ °C, absurde ✓
 - **Conclusion** : le modèle **n'est pas** valable indéfiniment ✓
 - **Limite physique** : la température ne peut descendre sous celle de la pièce, disons 20 °C ✓
 - **Domaine de validité** : environ $[0; 26,67]$ min ✓
 - **Contrôle** : $-6 \times 26,67 + 180 \approx 20$ °C ✓
 - **Réalité physique** : un refroidissement réel est **exponentiel**, de plus en plus lent — le modèle affine n'en est qu'une approximation initiale ✓
- Réponse.** $T(t) = -6t + 180$, soit 60 °C après 20 min ; le modèle cesse d'être valable vers 27 min (température de la pièce).

Correction de l'exercice 8 - Droites parallèles et perpendiculaires

- **Pente de d** : $\frac{3}{2}$ ✓
- **Parallèle** : même pente ✓
- **Forme** : $y = \frac{3}{2}x + p$ ✓
- **Passage par** $(2; 1)$: $1 = 3 + p$, donc $p = -2$ ✓
- **Équation de la parallèle** :

$$y = \frac{3}{2}x - 2$$

- **Contrôle** : $\frac{3}{2} \times 2 - 2 = 1$ ✓
- **Perpendiculaire** : pente m' telle que $\frac{3}{2}m' = -1$ ✓
- **Calcul** : $m' = -\frac{2}{3}$ ✓
- **Forme** : $y = -\frac{2}{3}x + p'$ ✓
- **Passage par** $(2; 1)$: $1 = -\frac{4}{3} + p'$, donc $p' = \frac{7}{3}$ ✓
- **Équation de la perpendiculaire** :

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$$

- **Contrôle** : $-\frac{4}{3} + \frac{7}{3} = \frac{3}{3} = 1$ ✓
- **Contrôle du produit des pentes** : $\frac{3}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -1$ ✓
- **Intersection de d et de la perpendiculaire** : $\frac{3}{2}x - 4 = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$ ✓
- **Résolution** : $\frac{13}{6}x = \frac{7}{3} + 4 = \frac{19}{3}$, donc $x = \frac{19}{3} \times \frac{6}{13} = \frac{38}{13} \approx 2,923$ ✓
- **Ordonnée** : $y = \frac{3}{2} \times \frac{38}{13} - 4 = \frac{57}{13} - \frac{52}{13} = \frac{5}{13} \approx 0,385$ ✓
- **Interprétation** : c'est le **projeté orthogonal** de $(2; 1)$ sur d ✓

Réponse. Parallèle : $y = \frac{3}{2}x - 2$ · perpendiculaire : $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$.

Correction de l'exercice 9 - Modèle de population

- **Variable** : t le nombre d'années depuis 2010 ✓
 - **Points connus** : $(0; 1250)$ et $(12; 1850)$ ✓
 - **Coefficient directeur** : $m = \frac{1850 - 1250}{12} = \frac{600}{12} = 50$ habitants par an ✓
 - **Expression** :

$$P(t) = 50t + 1250$$
 - **Contrôle en 0** : 1250 ✓
 - **Contrôle en 12** : $600 + 1250 = 1850$ ✓
 - **Prévision pour 2030** : $t = 20$ ✓
 - **Calcul** : $P(20) = 1000 + 1250 = 2250$ habitants ✓
 - **Année des 2500 habitants** : $50t + 1250 = 2500$ ✓
 - **Résolution** : $50t = 1250$, donc $t = 25$ ✓
 - **Année** : $2010 + 25 = 2035$ ✓
 - **Contrôle** : $50 \times 25 + 1250 = 1250 + 1250 = 2500$ ✓
 - **Taux de croissance annuel en 2010** : $\frac{50}{1250} = 4\%$ ✓
 - **Taux de croissance annuel en 2022** : $\frac{50}{1850} \approx 2,7\%$ ✓
 - **Observation** : le modèle affine correspond à une croissance **absolue** constante, donc à un taux **relatif décroissant** ✓
 - **Limite du modèle** : une croissance démographique suit plutôt un modèle **géométrique**, où le taux relatif est constant ✓
 - **Contrôle de l'écart** : à 4 % constant, la population de 2022 serait $1250 \times 1,04^{12} \approx 2002$ habitants, soit 152 de plus que l'observation ✓
- Réponse.** $P(t) = 50t + 1250$: 2250 habitants en 2030, et 2500 atteints en 2035.

Correction de l'exercice 10 - Trois points alignés ?

- **Taux de A à B** : $\frac{4 - (-1)}{2 - (-3)} = \frac{5}{5} = 1$ ✓
- **Taux de B à C** : $\frac{10 - 4}{7 - 2} = \frac{6}{5} = 1,2$ ✓
- **Comparaison** : $1 \neq 1,2$ ✓
- **Conclusion** : les points **ne sont pas alignés** ✓
- **Contrôle par le déterminant** : $\overrightarrow{AB} = (5; 5)$ et $\overrightarrow{AC} = (10; 11)$ ✓
- **Calcul** : $5 \times 11 - 10 \times 5 = 55 - 50 = 5 \neq 0$ ✓
- **Cohérence** : les deux méthodes concordent ✓
- **Aire du triangle** : $\frac{5}{2} = 2,5$ ✓
- **Interprétation** : le triangle est très « plat », les points sont presque alignés ✓
- **Droite (AB)** : $y = x + 2$ ✓
- **Contrôles** : $-3 + 2 = -1$ ✓ et $2 + 2 = 4$ ✓
- **Test de C** : $7 + 2 = 9 \neq 10$ ✓
- **Écart vertical** : 1 ✓
- **Correction pour aligner** : il faudrait $C'(7; 9)$ ✓
- **Contrôle avec C'** : le taux de B à C' vaut $\frac{9 - 4}{5} = 1$ ✓
- **Autre correction possible** : décaler C horizontalement en $C''(8; 10)$ ✓

— **Contrôle** : $\frac{10-4}{8-2} = 1 \checkmark$

Réponse. Non : les taux valent 1 et 1,2 (le point C est 1 unité trop haut).

Correction de l'exercice 11 - Fonction affine et signe

— **Zéro de la fonction** : $-4x + 10 = 0 \checkmark$

— **Résolution** : $x = 2,5 \checkmark$

— **Signe du coefficient directeur** : $-4 < 0$, la fonction est **décroissante** $\checkmark$

— **Tableau de signes** : positif avant 2,5, négatif après $\checkmark$

x	$-\infty \dots 2,5$	$2,5 \dots +\infty$
signe de $f(x)$	+	-

— **Contrôle en 0** : $f(0) = 10 > 0 \checkmark$

— **Contrôle en 3** : $f(3) = -2 < 0 \checkmark$

— **Inéquation** : $-4x + 10 \geq -6 \checkmark$

— **Isolement** : $-4x \geq -16 \checkmark$

— **Attention** : on divise par un nombre **négatif**, l'inégalité change de sens $\checkmark$

— **Solution** :

$$x \leq 4 \quad \text{soit} \quad]-\infty; 4]$$

— **Contrôle en 4** : $f(4) = -16 + 10 = -6 \checkmark$

— **Contrôle en 3** : $f(3) = -2 \geq -6 \checkmark$

— **Contrôle en 5** : $f(5) = -10 < -6 \checkmark$

— **Erreur classique** : conclure $x \geq 4$ en oubliant de changer le sens $\checkmark$

— **Vérification de l'erreur** : $f(5) = -10$, qui n'est **pas** $\geq -6 \checkmark$

— **Résolution de $f(x) > 10$** : $-4x > 0$, donc $x < 0 \checkmark$

Réponse. Positif sur $] -\infty; 2,5]$, négatif après ; $f(x) \geq -6$ sur $] -\infty; 4]$.

Correction de l'exercice 12 - Salaire et commission

— **Variable** : x le chiffre d'affaires en euros $\checkmark$

— **Part variable** : 3 % de x , soit $0,03x \checkmark$

— **Expression** :

$$S(x) = 0,03x + 1400$$

— **Objectif** : $0,03x + 1400 = 2000 \checkmark$

— **Résolution** : $0,03x = 600$, donc $x = 20\,000 \text{ €} \checkmark$

— **Contrôle** : $0,03 \times 20\,000 = 600$, plus 1400, soit 2000 € $\checkmark$

— **Salaire pour 50 000 € de chiffre** : $1500 + 1400 = 2900 \text{ €} \checkmark$

— **Salaire minimal** : 1400 €, atteint si le chiffre est nul $\checkmark$

— **Chiffre pour doubler le fixe** : $0,03x = 1400$, donc $x \approx 46\,667 \text{ €} \checkmark$

— **Contrôle** : $0,03 \times 46\,667 = 1400 \text{ €} \checkmark$

— **Part du variable pour $x = 20\,000$** : $\frac{600}{2000} = 30 \% \checkmark$

— **Part du variable pour $x = 100\,000$** : $\frac{3000}{4400} \approx 68,2 \% \checkmark$

— **Comparaison avec une commission seule de 10 %** : $0,1x \checkmark$

— **Égalité** : $0,1x = 0,03x + 1400$, donc $0,07x = 1400$ et $x = 20\,000 \text{ €} \checkmark$

— **Coïncidence** : le seuil est le même que précédemment $\checkmark$

- **Conseil** : au-delà de 20 000 € de chiffre, la commission seule serait plus avantageuse ✓
- **Contrôle pour 30 000 €** : 3000 € contre 2300 € ✓

Réponse. $S(x) = 0,03x + 1400$, et il faut 20 000 € de chiffre d'affaires.

Correction de l'exercice 13 - Deux droites et un point mobile

- **Distance verticale** : $|f(x) - g(x)|$ ✓
- **Différence** : $f(x) - g(x) = 3x - 2 - x - 6 = 2x - 8$ ✓
- **Équation** : $|2x - 8| = 4$ ✓
- **Premier cas** : $2x - 8 = 4$, donc $x = 6$ ✓
- **Second cas** : $2x - 8 = -4$, donc $x = 2$ ✓
- **Solutions** :

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = 6$$
- **Contrôle en 2** : $f(2) = 4$ et $g(2) = 8$, d'écart 4 ✓
- **Contrôle en 6** : $f(6) = 16$ et $g(6) = 12$, d'écart 4 ✓
- **Point d'intersection** : $2x - 8 = 0$, donc $x = 4$ ✓
- **Valeur commune** : $f(4) = g(4) = 10$ ✓
- **Symétrie** : 2 et 6 sont à égale distance de 4 ✓
- **Interprétation** : l'écart croît linéairement de part et d'autre du point d'intersection ✓
- **Contrôle en 0** : écart $|-8| = 8$ ✓
- **Contrôle en 8** : écart $|8| = 8$ ✓
- **Taux de croissance de l'écart** : 2 par unité de x ✓
- **Contrôle** : c'est la différence des pentes, $3 - 1 = 2$ ✓

Réponse. $x = 2$ ou $x = 6$ (l'intersection est en $x = 4$).

Correction de l'exercice 14 - Réservoir qui se vide

- **Points connus** : $(0; 450)$ et $(12; 270)$ ✓
- **Débit** : $m = \frac{270 - 450}{12} = \frac{-180}{12} = -15$ L/min ✓
- **Expression** :

$$V(t) = -15t + 450$$
- **Contrôle en 0** : 450 L ✓
- **Contrôle en 12** : $-180 + 450 = 270$ L ✓
- **Réservoir vide** : $-15t + 450 = 0$ ✓
- **Résolution** : $t = 30$ min ✓
- **Contrôle** : $-450 + 450 = 0$ ✓
- **Domaine de validité** : $[0; 30]$ min ✓
- **Volume à 20 min** : $-300 + 450 = 150$ L ✓
- **Instant de la moitié** : 225 L atteints quand $-15t = -225$, donc $t = 15$ min ✓
- **Cohérence** : c'est bien la moitié du temps, car il n'y a pas d'ordonnée à l'origine parasite ✓
- **Comparaison avec l'exercice de la cuve** : ici la proportionnalité fonctionne, la valeur finale étant nulle ✓
- **Débit en litres par heure** : $15 \times 60 = 900$ L/h ✓
- **Temps pour vider 1000 L au même débit** : $\frac{1000}{15} \approx 66,67$ min ✓

- **Volume restant après 35 min** : le modèle donnerait -75 L, ce qui est **absurde** ✓
- **Conclusion** : au-delà de 30 min, le volume reste nul ✓

Réponse. $V(t) = -15t + 450$, réservoir vide au bout de 30 min.

Correction de l'exercice 15 - Comparer trois abonnements

- **Fonctions** : $a(x) = 25$, $b(x) = 0,3x + 8$, $c(x) = 0,1x + 15$ ✓
- **Intersection de B et C** : $0,3x + 8 = 0,1x + 15$ ✓
- **Résolution** : $0,2x = 7$, donc $x = 35$ min ✓
- **Valeur commune** : $0,3 \times 35 + 8 = 18,5$ € ✓
- **Contrôle** : $0,1 \times 35 + 15 = 18,5$ € ✓
- **Intersection de B et A** : $0,3x + 8 = 25$, donc $x = \frac{17}{0,3} \approx 56,67$ min ✓
- **Intersection de C et A** : $0,1x + 15 = 25$, donc $x = 100$ min ✓
- **Comparaison sur $[0; 35]$** : B est le moins cher ✓
- **Contrôle en 20 min** : 14 € (B) contre 17 € (C) et 25 € (A) ✓
- **Comparaison sur $[35; 100]$** : C est le moins cher ✓
- **Contrôle en 60 min** : 21 € (C) contre 26 € (B) et 25 € (A) ✓
- **Comparaison au-delà de 100 min** : A est le moins cher ✓
- **Contrôle en 150 min** : 25 € (A) contre 30 € (C) et 53 € (B) ✓
- **Conclusion** :

B jusqu'à 35 min, C de 35 à 100 min, A au-delà

- **Remarque** : B n'est jamais optimal au-delà de 35 min, sa pente étant la plus forte ✓
- **Économie maximale d'un bon choix** : à 150 min, choisir A plutôt que B économise 28 € ✓

Réponse. B jusqu'à 35 min, C de 35 à 100 min, A au-delà de 100 min.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : deux véhicules

a) **Premier véhicule** : il part de A (position 0) et avance de 80 km/h ✓

— **Expression** :

$$d_1(t) = 80t$$

— **Second véhicule** : il part de B (position 240) et se rapproche de A ✓

— **Expression** :

$$d_2(t) = -60t + 240$$

- **Contrôle en $t = 0$** : 0 et 240 km ✓
- **Domaines** : d_1 est valable sur $[0; 3]$ et d_2 sur $[0; 4]$ ✓

b) **Croisement** : les positions sont égales ✓

- **Équation** : $80t = -60t + 240$ ✓
- **Résolution** : $140t = 240$, donc $t = \frac{240}{140} = \frac{12}{7} \approx 1,714$ h ✓
- **Conversion** : environ 1 h 43 min ✓
- **Position** : $80 \times \frac{12}{7} = \frac{960}{7} \approx 137,14$ km de A ✓
- **Contrôle** : $-60 \times \frac{12}{7} + 240 = -\frac{720}{7} + \frac{1680}{7} = \frac{960}{7}$ ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : le point de croisement est plus proche de B, la première voiture étant plus rapide ✓

— **Méthode rapide** : la distance 240 se réduit à $80 + 60 = 140$ km/h, d'où $t = \frac{240}{140}$ ✓

c) **Distance entre eux** : $|d_2(t) - d_1(t)| = |240 - 140t|$ ✓

— **Premier cas — avant le croisement** : $240 - 140t = 40$ ✓

— **Résolution** : $140t = 200$, donc $t = \frac{10}{7} \approx 1,429$ h, soit environ 1 h 26 min ✓

— **Second cas — après le croisement** : $140t - 240 = 40$ ✓

— **Résolution** : $140t = 280$, donc $t = 2$ h ✓

— **Réponses** :

$$t = \frac{10}{7} \approx 1,43 \text{ h} \quad \text{et} \quad t = 2 \text{ h}$$

— **Contrôle pour $t = 2$** : $d_1 = 160$ et $d_2 = 120$, d'écart 40 km ✓

— **Contrôle pour $t = \frac{10}{7}$** : $d_1 = \frac{800}{7} \approx 114,29$ et $d_2 = \frac{1080}{7} \approx 154,29$, d'écart 40 km ✓

— **Vérification de la cohérence** : les deux instants encadrent bien le croisement à 1,714 h ✓

d) **Arrivée du premier véhicule** : $80t = 240$, donc $t = 3$ h ✓

— **Arrivée du second** : $-60t + 240 = 0$, donc $t = 4$ h ✓

— **Conclusion** : le **premier** véhicule arrive en premier ✓

— **Avance** :

$$4 - 3 = 1 \text{ h}$$

— **Contrôle par les vitesses** : $\frac{240}{80} = 3$ h et $\frac{240}{60} = 4$ h ✓

— **Distance parcourue par le second quand le premier arrive** : $60 \times 3 = 180$ km ✓

— **Il lui reste** : $240 - 180 = 60$ km, soit exactement une heure à 60 km/h ✓

— **Cohérence** : l'avance de 1 h est confirmée ✓

— **Vitesse moyenne du croisement** : les deux ont parcouru $\frac{960}{7}$ et $240 - \frac{960}{7} = \frac{720}{7}$ km ✓

— **Contrôle du rapport** : $\frac{960}{720} = \frac{4}{3} = \frac{80}{60}$, conforme au rapport des vitesses ✓

Réponse. a) $d_1(t) = 80t$ et $d_2(t) = -60t + 240$ · b) à $\frac{12}{7} \approx 1$ h 43 min, à $\approx 137,14$ km de A · c) $t \approx 1,43$ h et $t = 2$ h · d) le premier, avec 1 h d'avance.