Plaquette 4 – Droites et fonctions affines : lectures et modélisations

Droites du plan — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Deux langages pour un seul objet.

Géométrie	Fonctions
droite $y = mx + p$	fonction affine $f(x) = mx + p$
pente m	coefficient directeur, **taux d'accroissement**
ordonnée à l'origine p	$f(0) = p$
point $(a\,;b)$ sur la droite	$f(a) = b$
intersection avec l'axe des abscisses	solution de $f(x) = 0$

Le taux d'accroissement. Pour deux points distincts de la droite :

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

C'est la variation de y **pour une augmentation de** 1 de x.

Signe de la pente et sens de variation.

Pente	Fonction	Droite
$m > 0$	croissante	montante
$m = 0$	constante	horizontale
$m < 0$	décroissante	descendante

Résoudre graphiquement. $f(x) = k$ se lit à l'intersection de la courbe et de la droite $y = k$; $f(x) > g(x)$ se lit là où la courbe de f est **au-dessus** de celle de g.

Modéliser une situation linéaire. On repère la **valeur initiale** (c'est p) et le **taux de variation** (c'est m), puis on écrit $f(x) = mx + p$. On précise toujours le **domaine** de validité : un modèle affine ne vaut jamais sur $\mathbb{R}$ tout entier dans un problème concret.

Comparer deux tarifs. On résout $f(x) = g(x)$ pour trouver le point de bascule, puis on conclut par un tableau de comparaison de part et d'autre.

Correction de l'exercice 1 – Du graphique à l'expression

Une fonction affine s'écrit $f(x) = mx + p$. Le point $(0\,;-3)$ donne l'ordonnée à l'origine, $p = -3$, et le coefficient directeur se calcule avec les deux points :

$$m = \frac{5 - (-3)}{4 - 0} = \frac{8}{4} = 2 \qquad f(x) = 2x - 3$$

Alors $f(10) = 20 - 3 = 17$. L'antécédent de 0 est la solution de $2x - 3 = 0$, soit $x = 1{,}5$: la droite coupe l'axe des abscisses en $(1{,}5\,;0)$.

Contrôle : $f(4) = 8 - 3 = 5$. Comme $m = 2 > 0$, f est croissante : quand x augmente de 1, $f(x)$ augmente de 2.

Réponse. $f(x) = 2x - 3$; $f(10) = 17$ et l'antécédent de 0 est 1,5.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 2 – Droite par deux points quelconques

Le coefficient directeur est le quotient de la variation des images par la variation des abscisses :

$$m = \frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)} = \frac{-8 - 7}{5} = -3$$

Donc $f(x) = -3x + p$, et $f(-2) = 6 + p = 7$ donne $p = 1$: $f(x) = -3x + 1$.

Contrôle : $f(3) = -9 + 1 = -8$. Comme $m < 0$, f est décroissante : $f(x)$ est positif avant $\frac{1}{3}$ (où il s’annule) et négatif après. La droite a pour équation cartésienne $3x + y - 1 = 0$.

Réponse. $f(x) = -3x + 1$.

Correction de l’exercice 3 – Deux tarifs de location

On modélise chaque tarif par une fonction affine de la distance x (en km) : $f(x) = 0{,}45x$ pour A, $g(x) = 0{,}2x + 35$ pour B. Les deux coûtent autant quand

$$0{,}45x = 0{,}2x + 35 \Leftrightarrow 0{,}25x = 35 \Leftrightarrow x = 140$$

soit 63 € chacun. A est moins cher jusqu’à 140 km, B au-delà.

Contrôle : à 100 km, 45 € contre 55 € ; à 200 km, 90 € contre 75 €. A n’a pas de part fixe mais coûte plus cher au kilomètre (0,45 contre 0,20) : B amortit son forfait de 35 € au bout de 140 km.

Réponse. Égalité à 140 km (pour 63 €) : A est moins cher en dessous, B au-delà.

Correction de l’exercice 4 – Remplissage d’une cuve

Le volume part de 120 L (ordonnée à l’origine) et augmente de 18 L chaque minute (coefficient directeur) :

$$V(t) = 18t + 120$$

La cuve est pleine quand $18t + 120 = 600$, soit $18t = 480$ et $t = \frac{80}{3} \approx 26{,}67$ min, environ 26 min 40 s. Le modèle vaut donc sur $\left[0\,;\frac{80}{3}\right]$.

Contrôle : $18 \times \frac{80}{3} = 480$, et $480 + 120 = 600$. Le volume n’est pas proportionnel au temps : à cause des 120 L du départ, la moitié de la capacité (300 L) est atteinte dès 10 minutes.

Réponse. $V(t) = 18t + 120$, cuve pleine après $\frac{80}{3} \approx 26{,}67$ min (environ 26 min 40 s).

Correction de l’exercice 5 – Conversion de températures

La conversion est affine : $F(c) = mc + p$. La valeur en 0 donne $p = 32$, et

$$m = \frac{212 - 32}{100 - 0} = 1{,}8 \qquad F(c) = 1{,}8c + 32$$

La température est la même dans les deux unités quand $F(c) = c$: $1{,}8c + 32 = c$, soit $0{,}8c = -32$ et $c = -40$. Ainsi -40 °C $= -40$ °F.

Contrôle : $1{,}8 \times (-40) + 32 = -40$. Et 37 °C donne 98,6 °F, la température du corps humain en Fahrenheit.

Réponse. $F(c) = 1{,}8c + 32$, et -40 °C $= -40$ °F.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 6 – Résoudre graphiquement

On résout d’abord l’équation : $2x - 1 = -x + 8 \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$. Les deux droites se coupent en $(3\,;5)$, puisque $f(3) = g(3) = 5$.

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow 2x - 1 > -x + 8 \Leftrightarrow 3x > 9 \Leftrightarrow x > 3$$

Graphiquement, la droite de f est au-dessus de celle de g à droite de 3. Enfin, $f(x) \leq 5 \Leftrightarrow 2x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 3$.

Contrôle : $f(4) = 7 > g(4) = 4$; $f(0) = -1 < g(0) = 8$. Le seuil 3 est le même dans les deux questions, car la valeur commune en $x = 3$ est justement 5.

Réponse. $x = 3 \cdot f(x) > g(x)$ sur $]3\,;+\infty[$ · $f(x) \leq 5$ sur $]-\infty\,;3]$.

Correction de l’exercice 7 – Refroidissement

La température part de 180 °C et diminue de 6 °C par minute :

$$T(t) = -6t + 180$$

Elle vaut 60 °C quand $-6t + 180 = 60$, soit $t = 20$ min.

Le modèle ne peut pas valoir indéfiniment : il donnerait 0 °C au bout de 30 min, puis des températures négatives. En réalité, le plat ne descend pas sous la température de la pièce, environ 20 °C, atteinte selon le modèle vers $t = \dfrac{160}{6} \approx 26{,}7$ min. Le refroidissement réel ralentit au fil du temps : le modèle affine n’est qu’une approximation du début.

Réponse. $T(t) = -6t + 180$, soit 60 °C après 20 min ; le modèle cesse d’être valable vers 27 min (température de la pièce).

Correction de l’exercice 8 – Droite parallèle passant par un point

Deux droites parallèles ont le même coefficient directeur. d' s’écrit donc $y = \dfrac{3}{2}x + p$, et elle passe par $(2\,;1)$:

$$1 = \frac{3}{2} \times 2 + p \Leftrightarrow p = -2 \qquad d' : y = \frac{3}{2}x - 2$$

Pour l’axe des abscisses, on résout $y = 0$. Pour d : $\dfrac{3}{2}x = 4$, soit $x = \dfrac{8}{3}$. Pour d' : $\dfrac{3}{2}x = 2$, soit $x = \dfrac{4}{3}$.

Contrôle : les deux droites ont des ordonnées à l’origine différentes (-4 et -2), elles sont strictement parallèles ; l’écart vertical entre elles vaut toujours 2.

Réponse. $d' : y = \dfrac{3}{2}x - 2$; d coupe l’axe des abscisses en $\left(\dfrac{8}{3}\,;0\right)$ et d' en $\left(\dfrac{4}{3}\,;0\right)$.

Correction de l’exercice 9 – Modèle de population

On note t le nombre d’années depuis 2010. Les données donnent les points $(0\,;1\,250)$ et $(12\,;1\,850)$, d’où le coefficient directeur

$$m = \frac{1\,850 - 1\,250}{12} = 50 \qquad P(t) = 50t + 1\,250$$

En 2030, $t = 20$: $P(20) = 2\,250$ habitants. On atteint 2 500 habitants quand $50t = 1\,250$, soit $t = 25$, c’est-à-dire en 2035.

Le modèle affine suppose une hausse de 50 habitants par an, donc un taux relatif qui diminue (4 % en 2010, environ 2,7 % en 2022). Une population suit souvent plutôt une évolution à taux constant.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $P(t) = 50t + 1250$: 2250 habitants en 2030, et 2500 atteints en 2035.

Correction de l'exercice 10 – Trois points alignés ?

Trois points sont alignés si le taux d'accroissement (coefficient directeur) est le même entre chaque paire :

$$\frac{4-(-1)}{2-(-3)} = \frac{5}{5} = 1 \qquad \frac{10-4}{7-2} = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

Les taux sont différents : les points **ne sont pas alignés**.

Contrôle : la droite (AB) a pour équation $y = x + 2$; en $x = 7$, elle passe à la hauteur 9, et C est un cran au-dessus, à 10. Par la colinéarité, $\overrightarrow{AB}(5\,;5)$ et $\overrightarrow{AC}(10\,;11)$ ont un déterminant $55 - 50 = 5 \neq 0$. Les points sont presque alignés : avec $C'(7\,;9)$, ils le seraient.

Réponse. Non : les taux valent 1 et 1,2 (le point C est 1 unité trop haut).

Correction de l'exercice 11 – Fonction affine et signe

f s'annule quand $-4x + 10 = 0$, soit $x = 2{,}5$. Son coefficient directeur, -4, est négatif : f est décroissante, donc positive avant 2,5 et négative après.

x	$]-\infty\,;2{,}5[$	$2{,}5$	$]2{,}5\,;+\infty[$
signe de $f(x)$	$+$	0	$-$

Pour l'inéquation, on divise par -4, nombre négatif, ce qui **change le sens** :

$$-4x + 10 \geq -6 \Leftrightarrow -4x \geq -16 \Leftrightarrow x \leq 4$$

Contrôle : $f(4) = -6$, la borne est incluse ; $f(5) = -10 < -6$. Oublier de changer le sens donnerait $x \geq 4$, contredit par ce dernier calcul.

Réponse. Positif sur $]-\infty\,;2{,}5]$, négatif après ; $f(x) \geq -6$ sur $]-\infty\,;4]$.

Correction de l'exercice 12 – Salaire et commission

Le salaire est la somme d'une part fixe et de 3 % du chiffre d'affaires x :

$$S(x) = 0{,}03x + 1\,400$$

C'est une fonction affine de coefficient directeur 0,03. Pour atteindre 2 000 €, on résout $0{,}03x + 1\,400 = 2\,000$, soit $0{,}03x = 600$ et $x = 20\,000$ €.

Contrôle : 3 % de 20 000 € font 600 €. Une commission seule de 10 % donnerait autant pour $0{,}1x = 0{,}03x + 1\,400$, soit encore $x = 20\,000$ € ; au-delà, elle serait plus avantageuse (3 000 € contre 2 300 € à 30 000 € de chiffre d'affaires).

Réponse. $S(x) = 0{,}03x + 1400$, et il faut 20 000 € de chiffre d'affaires.

Correction de l'exercice 13 – Deux droites et un point mobile

La distance verticale entre les deux droites, à l'abscisse x, est l'écart entre les deux images :

$$|f(x) - g(x)| = |3x - 2 - x - 6| = |2x - 8|$$

On résout $|2x - 8| = 4$: soit $2x - 8 = 4$, donc $x = 6$; soit $2x - 8 = -4$, donc $x = 2$.

Contrôle : en $x = 2$, $f(2) = 4$ et $g(2) = 8$; en $x = 6$, $f(6) = 16$ et $g(6) = 12$. Les droites se coupent en $x = 4$ (où $2x - 8 = 0$), et les deux solutions sont symétriques par rapport à 4 : l'écart augmente de 2 par unité, la différence des coefficients directeurs.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $x = 2$ ou $x = 6$ (l'intersection est en $x = 4$).

Correction de l'exercice 14 – Réservoir qui se vide

Le volume diminue à débit constant : c'est une fonction affine du temps. Les points $(0\,;450)$ et $(12\,;270)$ donnent

$$m = \frac{270 - 450}{12} = -15 \qquad V(t) = -15t + 450$$

Le réservoir perd 15 L par minute. Il est vide quand $-15t + 450 = 0$, soit $t = 30$ min.

Contrôle : $V(12) = -180 + 450 = 270$ L. Le modèle n'a de sens que sur $[0\,;30]$: au-delà, il donnerait un volume négatif. Ici, la moitié du volume (225 L) est atteinte à la moitié du temps, 15 min, parce que la valeur finale est nulle.

Réponse. $V(t) = -15t + 450$, réservoir vide au bout de 30 min.

Correction de l'exercice 15 – Comparer trois abonnements

Chaque forfait est une fonction affine de la durée x (en min) : $a(x) = 25$, $b(x) = 0{,}3x + 8$ et $c(x) = 0{,}1x + 15$. On cherche les durées où deux forfaits coûtent autant :

$$b(x) = c(x) \Leftrightarrow 0{,}2x = 7 \Leftrightarrow x = 35 \qquad c(x) = a(x) \Leftrightarrow 0{,}1x = 10 \Leftrightarrow x = 100$$

B est le moins cher jusqu'à 35 min, C de 35 à 100 min, A au-delà de 100 min.

Contrôle : à 20 min, 14 € (B), 17 € (C), 25 € (A) ; à 60 min, 26 €, 21 €, 25 € ; à 150 min, 53 €, 30 €, 25 €. B a la plus forte pente : il n'est jamais le meilleur au-delà de 35 min.

Réponse. B jusqu'à 35 min, C de 35 à 100 min, A au-delà de 100 min.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : deux véhicules

a) La première voiture part de A (position 0) et avance de 80 km par heure : $d_1(t) = 80t$. La seconde part de B (position 240) et se rapproche de A de 60 km par heure : $d_2(t) = -60t + 240$.

b) Elles se croisent quand leurs positions sont égales :

$$80t = -60t + 240 \Leftrightarrow 140t = 240 \Leftrightarrow t = \frac{12}{7} \approx 1{,}71 \text{ h}$$

soit environ 1 h 43 min, à $80 \times \frac{12}{7} = \frac{960}{7} \approx 137{,}1$ km de A.

c) Leur distance vaut $|d_2(t) - d_1(t)| = |240 - 140t|$. Elle vaut 40 km si $240 - 140t = 40$, soit $t = \frac{10}{7} \approx 1{,}43$ h, ou si $140t - 240 = 40$, soit $t = 2$ h.

d) La première arrive au bout de $\frac{240}{80} = 3$ h, la seconde au bout de $\frac{240}{60} = 4$ h : la première arrive avec 1 h d'avance.

Réponse. a) $d_1(t) = 80t$ et $d_2(t) = -60t + 240$ · b) à $\frac{12}{7} \approx 1$ h 43 min, à $\approx 137{,}14$ km de A · c) $t \approx 1{,}43$ h et $t = 2$ h · d) le premier, avec 1 h d'avance.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).