Plaquette 2 – Équation cartésienne et vecteur directeur

Droites du plan — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les trois écritures d'une droite.

Écriture	Forme	Avantage
réduite	$y = mx + p$	pente et ordonnée à l'origine lisibles
cartésienne	$ax + by + c = 0$	couvre aussi les droites verticales
paramétrée par un point et un vecteur	A et $\vec{u}$	pas de division, jamais de cas particulier

Du cartésien au vecteur directeur. Si $D : ax + by + c = 0$, alors un vecteur directeur est

$$\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

Attention à l'**ordre** et au **signe** : on prend $-b$ en abscisse et a en ordonnée.

Du vecteur directeur au cartésien. Si $\vec{u}(\alpha\,;\beta)$ dirige une droite passant par $A(x_A\,;y_A)$, alors $M(x\,;y)$ appartient à la droite si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires :

$$\beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0$$

Pente et vecteur directeur. Si $\vec{u}(\alpha\,;\beta)$ avec $\alpha \neq 0$, la pente vaut $m = \dfrac{\beta}{\alpha}$. Si $\alpha = 0$, la droite est **verticale** et n'a pas de pente.

Parallélisme. Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires, $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$; pour des équations réduites, si elles ont le même coefficient directeur, $m = m'$. Elles sont alors confondues ou strictement parallèles, ce qu'on décide en testant un point.

Droites particulières. $x = h$ est verticale (vecteur directeur $(0\,;1)$), $y = k$ est horizontale (vecteur directeur $(1\,;0)$).

Correction de l'exercice 1 – De l'équation réduite au cartésien

Une équation cartésienne s'écrit $ax + by + c = 0$: on fait passer tous les termes dans le même membre.

— $y = 3x - 5$ devient $3x - y - 5 = 0$.

— Pour $y = -\dfrac{2}{3}x + 1$, on multiplie d'abord par 3 pour supprimer la fraction : $3y = -2x + 3$, soit $2x + 3y - 3 = 0$.

— $x = 4$ devient $x - 4 = 0$ ($a = 1$, $b = 0$, $c = -4$).

$$y = mx + p \Leftrightarrow mx - y + p = 0$$

La troisième droite est **verticale** : elle n'a pas d'équation réduite, mais elle a une équation cartésienne. **Contrôle** : en $x = 0$, la deuxième équation donne $3y = 3$, soit $y = 1$, l'ordonnée à l'origine annoncée. Une équation cartésienne n'est pas unique : $6x - 2y - 10 = 0$ décrit la même droite que la première.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $3x - y - 5 = 0$; $2x + 3y - 3 = 0$; $x - 4 = 0$.

Correction de l'exercice 2 – Du cartésien à la forme réduite

Pour obtenir la forme réduite, on isole y, ce qui n'est possible que si le coefficient de y n'est pas nul.

$$4x - 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow -2y = -4x - 6 \Leftrightarrow y = 2x + 3$$

De même, $3x + 5y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{5}x$: cette droite passe par l'origine.

La troisième équation, $2x - 8 = 0$, ne contient pas y : elle équivaut à $x = 4$, une droite **verticale**, qui n'a pas de forme réduite. Une équation $ax + by + c = 0$ a une forme réduite si et seulement si $b \neq 0$. **Contrôle** : $(5\,;-3)$ vérifie $3 \times 5 + 5 \times (-3) = 0$.

Réponse. $y = 2x + 3$; $y = -\frac{3}{5}x$; la troisième est verticale ($x = 4$) et n'en admet pas.

Correction de l'exercice 3 – Vecteur directeur d'une droite

Pour une droite d'équation $ax + by + c = 0$, le vecteur $\vec{u}(-b\,;a)$ est un vecteur directeur :

$$ax + by + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{u}(-b\,;a)$$

— $3x - 5y + 2 = 0$: $a = 3$, $b = -5$, donc $\vec{u}(5\,;3)$.
— $y = 4x - 1$ s'écrit $4x - y - 1 = 0$, donc $\vec{v}(1\,;4)$: pour $y = mx + p$, on peut toujours prendre $(1\,;m)$.
— $x = -2$ s'écrit $x + 2 = 0$, donc $\vec{w}(0\,;1)$, vertical comme la droite.

Contrôle pour la première : la forme réduite $y = \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}$ a pour coefficient directeur $\frac{3}{5}$, et $\vec{u}(5\,;3)$ monte de 3 quand on avance de 5. Tout vecteur colinéaire, comme $(10\,;6)$, convient aussi.

Réponse. $(5\,;3)$; $(1\,;4)$; $(0\,;1)$.

Correction de l'exercice 4 – Droite par un point et un vecteur

Un point $M(x\,;y)$ est sur la droite si et seulement si $\overrightarrow{AM}(x-2\,;y+3)$ est colinéaire à $\vec{u}(4\,;7)$, c'est-à-dire si leur déterminant est nul :

$$4(y+3) - 7(x-2) = 0 \Leftrightarrow 4y + 12 - 7x + 14 = 0 \Leftrightarrow 7x - 4y - 26 = 0$$

Contrôle en A : $14 + 12 - 26 = 0$. Avec $a = 7$ et $b = -4$, le vecteur $(-b\,;a) = (4\,;7)$ est bien $\vec{u}$.

La forme réduite est $y = \frac{7}{4}x - 6{,}5$. Un autre point de la droite s'obtient en ajoutant $\vec{u}$ à A : $(6\,;4)$, et $42 - 16 - 26 = 0$.

Réponse. $7x - 4y - 26 = 0$, soit $y = \frac{7}{4}x - 6{,}5$.

Correction de l'exercice 5 – Droite par deux points

Le vecteur $\overrightarrow{AB}(4\,;-12)$ dirige la droite ; on peut prendre plus simplement $(1\,;-3)$. Un point $M(x\,;y)$ est sur (AB) si $\overrightarrow{AM}(x+1\,;y-5)$ est colinéaire à $(1\,;-3)$:

$$1 \times (y-5) - (x+1) \times (-3) = 0 \Leftrightarrow y - 5 + 3x + 3 = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 2 = 0$$

Contrôle : A donne $-3 + 5 - 2 = 0$ et B donne $9 - 7 - 2 = 0$.

La forme réduite est $y = -3x + 2$: coefficient directeur -3, ce qu'on retrouve directement par $\frac{-7-5}{3+1} = -3$, et ordonnée à l'origine 2. La droite coupe l'axe des abscisses en $x = \frac{2}{3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $3x + y - 2 = 0$, soit $y = -3x + 2$.

Correction de l'exercice 6 – Droites parallèles

Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. Les deux premières ont pour vecteurs directeurs $(3\,;2)$ et $(-6\,;-4)$:

$$\det = 3 \times (-4) - (-6) \times 2 = -12 + 12 = 0$$

Elles sont parallèles. Sont-elles confondues ? Le point $(1\,;3)$ de la première ($2 - 9 + 7 = 0$) donne $-4 + 18 + 1 = 15 \neq 0$ dans la seconde : elles sont **strictement parallèles**.

La troisième droite a pour vecteur directeur $(-2\,;3)$, et $3 \times 3 - (-2) \times 2 = 13 \neq 0$: elle est **sécante** à la première. **Contrôle** par les coefficients directeurs : $\frac{2}{3}$ pour les deux premières, $-\frac{3}{2}$ pour la troisième.

Réponse. Les deux premières sont strictement parallèles ; la première et la troisième sont sécantes.

Correction de l'exercice 7 – Parallèle passant par un point

Deux droites parallèles ont des vecteurs directeurs colinéaires ; avec une équation cartésienne, on peut garder les mêmes coefficients a et b et ne changer que la constante. La droite cherchée s'écrit donc $5x - 2y + c = 0$, et elle passe par $A(4\,;1)$:

$$5 \times 4 - 2 \times 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -18$$

Une équation est $5x - 2y - 18 = 0$, soit $y = \frac{5}{2}x - 9$.

Contrôle : la droite donnée a pour forme réduite $y = \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$; même coefficient directeur $\frac{5}{2}$, ordonnées à l'origine différentes. Un autre point de la parallèle : $A + (2\,;5) = (6\,;6)$, et $30 - 12 - 18 = 0$.

Réponse. $5x - 2y - 18 = 0$, soit $y = \frac{5}{2}x - 9$.

Correction de l'exercice 8 – Équation réduite et intersections avec les axes

Le coefficient directeur est le rapport des accroissements :

$$m = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-4 - 5}{4 + 2} = \frac{-9}{6} = -1{,}5$$

La droite s'écrit $y = -1{,}5x + p$; elle passe par B : $5 = -1{,}5 \times (-2) + p = 3 + p$, donc $p = 2$. Équation : $y = -1{,}5x + 2$. **Contrôle** en C : $-6 + 2 = -4$.

L'ordonnée à l'origine donne l'intersection avec l'axe des ordonnées, $(0\,;2)$. Avec l'axe des abscisses, $y = 0$: $-1{,}5x + 2 = 0$, soit $x = \frac{2}{1{,}5} = \frac{4}{3}$.

Réponse. $y = -1{,}5x + 2$; elle coupe l'axe des ordonnées en $(0\,;2)$ et l'axe des abscisses en $\left(\frac{4}{3}\,;0\right)$.

Correction de l'exercice 9 – Intersection de deux droites cartésiennes

Les vecteurs directeurs $(-2\,;3)$ et $(4\,;1)$ ont un déterminant $-2 \times 1 - 4 \times 3 = -14 \neq 0$: les droites sont sécantes. On écrit leurs équations réduites :

$$3x + 2y - 12 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + 6 \qquad x - 4y + 10 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

L'abscisse du point commun vérifie $-\frac{3}{2}x+6=\frac{1}{4}x+\frac{5}{2}$; en multipliant par 4, $-6x+24=x+10$, soit $7x=14$ et $x=2$. Puis $y=-3+6=3$. Le point d'intersection est $E(2\,;3)$.

Contrôle dans les équations de départ : $6+6-12=0$ ✓ et $2-12+10=0$ ✓.

Réponse. $E(2\,;3)$.

Correction de l'exercice 10 – Parallèles ou sécantes ?

Des vecteurs directeurs sont $(-6\,;2)$ et $(-3\,;1)$; leur déterminant vaut $-6\times1-(-3)\times2=0$: ils sont colinéaires, les droites sont **parallèles**.

Sont-elles confondues ? Le point $(-1\,;0)$ de la seconde droite donne, dans la première équation, $-2+0-5=-7\neq0$: il n'est pas sur la première. Les droites sont **strictement parallèles** et n'ont **aucun** point commun.

Contrôle par les formes réduites : $y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{6}$ et $y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$, même coefficient directeur, ordonnées à l'origine différentes.

Réponse. Aucun point commun : les droites sont strictement parallèles.

Correction de l'exercice 11 – Trois droites concourantes

Trois droites sont concourantes si elles passent par un même point. On cherche l'intersection des deux premières, puis on teste la troisième. Leurs équations réduites sont $y=-x+6$ et $y=2x-3$:

$$-x+6=2x-3\Leftrightarrow3x=9\Leftrightarrow x=3\qquad y=-3+6=3$$

Les deux premières se coupent en $E(3\,;3)$. Dans la troisième : $3\times3-4\times3+1=-2\neq0$. Le point E n'est pas sur la troisième droite : les trois droites ne sont **pas** concourantes.

Contrôle : la première et la troisième se coupent en $\left(\frac{23}{7}\,;\frac{19}{7}\right)$, un autre point. Pour qu'elles soient concourantes, il faudrait par exemple $3x-4y+3=0$.

Réponse. Non : les deux premières se coupent en $E(3\,;3)$, qui donne $-2\neq0$ dans la troisième.

Correction de l'exercice 12 – Droite et paramètre

La droite passe par $A(2\,;4)$ si les coordonnées de A vérifient l'équation : $2m+12-6=0$, donc $m=-3$. On obtient $-3x+3y-6=0$, soit $y=x+2$, et A vérifie bien $4=2+2$.

Pour le parallélisme, on compare les coefficients directeurs. La forme réduite est $y=-\frac{m}{3}x+2$, et la droite $y=2x$ a pour coefficient directeur 2 :

$$-\frac{m}{3}=2\Leftrightarrow m=-6$$

On obtient $y=2x+2$, strictement parallèle à $y=2x$. Remarque : en $x=0$, l'équation donne toujours $y=2$; toutes les droites de la famille passent par $(0\,;2)$.

Réponse. $m=-3$ pour passer par A ; $m=-6$ pour être parallèle à $y=2x$.

Correction de l'exercice 13 – Médiane et équation

La médiane issue de A joint A au milieu du côté opposé, $A'\left(\frac{8+2}{2}\,;\frac{2+6}{2}\right)=(5\,;4)$. Elle passe par l'origine A, donc son équation est de la forme $y=mx$, avec

$$m=\frac{4-0}{5-0}=\frac{4}{5}\qquad\text{soit}\qquad y=\frac{4}{5}x\quad\text{ou}\quad4x-5y=0$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle en A' : $20-20=0$.

La médiane issue de B passe par B et $B'(1\,;3)$, milieu de $[AC]$: $x+7y-22=0$. Les deux médianes se coupent en $\left(\frac{10}{3}\,;\frac{8}{3}\right)$, qui est bien le centre de gravité $\left(\frac{0+8+2}{3}\,;\frac{0+2+6}{3}\right)$.

Réponse. $y=\frac{4}{5}x$, soit $4x-5y=0$.

Correction de l'exercice 14 – Parallèle à un côté d'un triangle

La droite (BC) a pour coefficient directeur $\frac{9-3}{3-7}=\frac{6}{-4}=-\frac{3}{2}$. La parallèle d a le même coefficient directeur : $y=-\frac{3}{2}x+p$, et elle passe par A :

$$1=-\frac{3}{2}\times 1+p \Leftrightarrow p=\frac{5}{2} \qquad d : y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$$

Elle coupe l'axe des abscisses quand $y=0$: $\frac{3}{2}x=\frac{5}{2}$, soit $x=\frac{5}{3}$.

Contrôle : $\overrightarrow{BC}(-4\,;6)$ et le vecteur $(2\,;-3)$, qui dirige d, ont un déterminant $-4\times(-3)-2\times 6=0$: ils sont bien colinéaires.

Réponse. $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$; d coupe l'axe des abscisses en $\left(\frac{5}{3}\,;0\right)$.

Correction de l'exercice 15 – Alignement par les équations

On détermine la droite (AB), puis on teste si C lui appartient. Le coefficient directeur vaut $\frac{1-(-5)}{1-(-2)}=\frac{6}{3}=2$, et la droite passe par $B(1\,;1)$: $1=2+p$, donc $p=-1$.

$$(AB) : y=2x-1$$

Contrôle en A : $-4-1=-5$. Pour $C(4\,;7)$: $2\times 4-1=7$, donc C est sur (AB) : les trois points sont **alignés**.

On le confirme par la colinéarité : $\overrightarrow{AB}(3\,;6)$ et $\overrightarrow{AC}(6\,;12)=2\overrightarrow{AB}$, donc B est même le milieu de $[AC]$.

Réponse. Oui : ils vérifient tous $y=2x-1$, et B est même le milieu de $[AC]$.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : triangle et droites remarquables

a) $[BC]$ est sur l'axe des abscisses : $y=0$. Pour (AB), le coefficient directeur vaut $\frac{0-4}{-2-0}=2$ et l'ordonnée à l'origine 4 : $y=2x+4$. Pour (AC) : $\frac{0-4}{6-0}=-\frac{2}{3}$, d'où $y=-\frac{2}{3}x+4$.

b) Le milieu de $[BC]$ est $I(2\,;0)$. La médiane (AI) a pour coefficient directeur $\frac{0-4}{2-0}=-2$: $y=-2x+4$. La hauteur issue de A est perpendiculaire à (BC), qui est horizontale : elle est **verticale**, d'équation $x=0$.

c) La médiatrice de $[BC]$ est perpendiculaire à ce segment horizontal en son milieu : c'est la droite verticale $x=2$. **Contrôle** par $MB^2=MC^2$: $(x+2)^2=(x-6)^2$ donne $16x=32$, soit $x=2$.

d) $AB=\sqrt{20}$, $AC=\sqrt{52}$ et $BC=8$: les trois longueurs sont différentes, le triangle n'est pas isocèle. Sa base $[BC]$ mesure 8 et sa hauteur 4 :

$$A=\frac{8\times 4}{2}=16$$

Réponse. a) $y=0$, $y=2x+4$, $y=-\frac{2}{3}x+4$ · b) médiane $y=-2x+4$, hauteur $x=0$ · c)

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$x = 2$ · d) non isocèle, aire 16.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).