Plaquette 1 – Équations de droites, parallélisme et intersections

Droites du plan — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules et méthodes pour les droites.

— **Équation réduite** d'une droite non verticale : $y = mx + p$ où m est le **coefficient directeur** et p l'**ordonnée à l'origine**.

— Coefficient directeur à partir de deux points A et B (avec $x_A \neq x_B$) :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

— Une droite **verticale** a pour équation $x = k$: elle n'a pas de coefficient directeur.

— **Équation cartésienne** : $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$; un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

— Deux droites non verticales sont **parallèles** si et seulement si elles ont le même coefficient directeur ; elles sont **sécantes** sinon.

— Un point appartient à une droite si ses coordonnées vérifient son équation.

— Point d'intersection de $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ (avec $m \neq m'$) : son abscisse vérifie $mx + p = m'x + p'$, puis on calcule l'ordonnée.

Correction de l'exercice 1 – Coefficient directeur et équation réduite

On calcule d'abord le coefficient directeur avec la formule du cours :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9-3}{4-1} = \frac{6}{3} = 2$$

— L'équation est donc de la forme $y = 2x + p$.

— On détermine p en utilisant un point de la droite, par exemple $A(1\,;3)$: $3 = 2 \times 1 + p$, donc $p = 1$.

— L'équation réduite est $y = 2x + 1$.

— Vérification avec B : $2 \times 4 + 1 = 9$, ce qui est bien l'ordonnée de B.

Réponse. $y = 2x + 1$.

Correction de l'exercice 2 – Droite donnée par un point et une pente

— L'équation est de la forme $y = -3x + p$.

— On remplace les coordonnées de A : $5 = -3 \times (-2) + p = 6 + p$.

— Donc $p = 5 - 6 = -1$.

— L'équation réduite est $y = -3x - 1$.

— Vérification : pour $x = -2$, $-3 \times (-2) - 1 = 6 - 1 = 5$. Correct.

Sens du coefficient. $m = -3 < 0$: la droite est décroissante ; quand x augmente de 1, y diminue de 3.

Réponse. $y = -3x - 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Appartenance à une droite

On remplace x par l'abscisse du point et on compare avec son ordonnée.

— Pour $C(3\,;7)$: $2\times 3+1=7$, ce qui est l'ordonnée de C. Donc $C\in d$.
— Pour $D(0\,;2)$: $2\times 0+1=1\neq 2$. Donc $D\notin d$.
— Remarque : l'ordonnée à l'origine de d est 1, donc d coupe l'axe des ordonnées en $(0\,;1)$, et non en $(0\,;2)$.

Réponse. $C\in d$ mais $D\notin d$.

Correction de l'exercice 4 – De l'équation cartésienne à l'équation réduite

On isole y :

— $2x+3y-6=0$ donne $3y=-2x+6$.
— En divisant par 3 :

$$y=-\frac{2}{3}x+2$$

— Le coefficient directeur est $-\dfrac{2}{3}$ et l'ordonnée à l'origine 2.
— Intersection avec l'axe des ordonnées : $x=0$ donne $y=2$, soit le point $(0\,;2)$.
— Intersection avec l'axe des abscisses : $y=0$ donne $-\dfrac{2}{3}x+2=0$, soit $x=3$, d'où le point $(3\,;0)$.

Réponse. $y=-\dfrac{2}{3}x+2$; points $(0\,;2)$ et $(3\,;0)$.

Correction de l'exercice 5 – Vecteur directeur

Formule du cours : pour $ax+by+c=0$, un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

— Pour d : $a=3$ et $b=-4$, donc $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.
— L'équation réduite de d s'obtient en isolant y : $4y=3x+5$, soit $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$. Son coefficient directeur est $\dfrac{3}{4}$.
— Pour la droite $y=\dfrac{3}{4}x+1$, un vecteur directeur est $\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$, ou plus simplement $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ (en multipliant par 4).
— Les deux droites ont le même coefficient directeur $\dfrac{3}{4}$: elles sont **parallèles**, ce que confirme le vecteur directeur commun.

Réponse. $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ pour les deux droites : elles sont parallèles.

Correction de l'exercice 6 – Reconnaître des droites parallèles

On met d_2 sous forme réduite pour comparer les coefficients directeurs.

— $4x-2y+7=0$ donne $2y=4x+7$, soit $y=2x+3{,}5$.
— d_1 a pour coefficient directeur 2, d_2 également : les droites sont **parallèles**.
— Elles ne sont pas confondues car leurs ordonnées à l'origine diffèrent (-3 et 3,5) : le parallélisme est strict.

Réponse. Oui, parallèles (même coefficient directeur 2), et distinctes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – Intersection de deux droites

Au point d'intersection, les deux équations sont vérifiées en même temps : les ordonnées sont égales.

— On résout $2x - 1 = -x + 5$.
— On ajoute x : $3x - 1 = 5$, puis on ajoute 1 : $3x = 6$, donc $x = 2$.
— On calcule y avec l'une des deux équations : $y = 2 \times 2 - 1 = 3$.
— Vérification avec l'autre : $-2 + 5 = 3$. Même valeur.
— Le point d'intersection est $I(2\,;3)$.

Réponse. $I(2\,;3)$.

Correction de l'exercice 8 – Intersection à partir d'équations cartésiennes

On écrit d'abord les équations réduites, en isolant y.

— d_1 : $2y = -x + 4$, donc $y = -\frac{1}{2}x + 2$.
— d_2 : $y = 3x - 5$.
— Les coefficients directeurs, $-\frac{1}{2}$ et 3, sont différents : les droites sont sécantes.
— L'abscisse du point commun vérifie $-\frac{1}{2}x + 2 = 3x - 5$, soit $7 = \frac{7}{2}x$, donc $x = 2$.
— Alors $y = 3 \times 2 - 5 = 1$.
— Vérification dans l'équation de d_1 : $2 + 2 \times 1 - 4 = 0$. Correct.
— Les droites sont sécantes au point $(2\,;1)$.

Réponse. Les droites sont sécantes en $(2\,;1)$.

Correction de l'exercice 9 – Droites verticales et horizontales

— La droite **verticale** est formée des points d'abscisse 3 : son équation est $x = 3$.
— La droite **horizontale** est formée des points d'ordonnée -2 : son équation est $y = -2$, c'est-à-dire $y = 0 \times x - 2$ (coefficient directeur nul).
— La droite verticale n'a pas de coefficient directeur : en prenant deux de ses points, $x_B - x_A = 0$ et le quotient $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ n'existe pas. Elle ne peut donc pas s'écrire $y = mx + p$, mais elle admet l'équation cartésienne $x - 3 = 0$.

Réponse. $x = 3$ et $y = -2$; pas de coefficient directeur pour la verticale (division par zéro).

Correction de l'exercice 10 – Problème : choisir un tarif

a) Les deux prix sont des fonctions affines du nombre de séances :

— Formule A : $p_A(x) = 0{,}8x + 12$ (le 12 est payé une seule fois).
— Formule B : $p_B(x) = 1{,}4x$.

b) On cherche le nombre de séances pour lequel les deux prix sont égaux, ce qui revient à chercher l'intersection des deux droites.

— $0{,}8x + 12 = 1{,}4x$.
— On retire $0{,}8x$: $12 = 0{,}6x$, donc $x = \frac{12}{0{,}6} = 20$.
— Pour $x = 20$, les deux formules coûtent $1{,}4 \times 20 = 28$ €.
— Au-delà, la formule A est moins chère : par exemple pour 30 séances, $p_A = 36$ € contre $p_B = 42$ €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Conclusion : **à partir de** 21 **séances**, la formule A est strictement plus avantageuse (à 20 séances, les deux se valent).

Réponse. a) $p_A(x) = 0{,}8x + 12$ et $p_B(x) = 1{,}4x$ · b) à partir de 21 séances (égalité à 20 séances, 28 €).

Correction de l'exercice 11 – Lire une équation sur un graphique

On lit l'ordonnée à l'origine, là où la droite coupe l'axe des ordonnées : $p = -2$. Pour le coefficient directeur, on repère un second point de la droite sur le quadrillage, $(4\,;4)$, et l'on calcule le rapport des accroissements :

$$m = \frac{4-(-2)}{4-0} = \frac{6}{4} = 1{,}5$$

L'équation réduite est $y = 1{,}5x - 2$.

Contrôle : quand on avance de 2 carreaux vers la droite, la droite monte de 3 carreaux, et $\frac{3}{2} = 1{,}5$. En $x = 2$, on lit $y = 1$, et $1{,}5 \times 2 - 2 = 1$.

Réponse. $y = 1{,}5x - 2$.

Correction de l'exercice 12 – Parallèle passant par un point

Deux droites parallèles ont le même coefficient directeur : d' s'écrit $y = -2x + p$. Elle passe par $A(1\,;4)$, donc

$$4 = -2 \times 1 + p \Leftrightarrow p = 6$$

L'équation de d' est $y = -2x + 6$.

Contrôle : A vérifie $-2 + 6 = 4$. Les ordonnées à l'origine, 3 et 6, sont différentes : d et d' sont strictement parallèles, l'une au-dessus de l'autre.

Réponse. d':$y = -2x + 6$.

Correction de l'exercice 13 – Point d'une droite et coordonnée manquante

Un point appartient à d si ses coordonnées vérifient l'équation. Pour $x = 6$:

$$3 \times 6 - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow 22 = 2y \Leftrightarrow y = 11$$

Le point est $(6\,;11)$. Pour $y = -1$: $3x + 2 + 4 = 0$, soit $3x = -6$ et $x = -2$; le point est $(-2\,;-1)$.

Contrôle par l'équation réduite, $y = 1{,}5x + 2$: $1{,}5 \times 6 + 2 = 11$ et $1{,}5 \times (-2) + 2 = -1$.

Réponse. $(6\,;11)$ et $(-2\,;-1)$.

Correction de l'exercice 14 – Droites sans point commun

On écrit les équations réduites : d_1:$y = 2x - 3$ et d_2:$2y = 4x + 1$, soit $y = 2x + \frac{1}{2}$.

Même coefficient directeur 2, ordonnées à l'origine différentes (-3 et $\frac{1}{2}$) : les droites sont **strictement parallèles**, elles n'ont **aucun** point commun.

Si l'on cherche quand même l'abscisse commune, $2x - 3 = 2x + \frac{1}{2}$ donne $-3 = \frac{1}{2}$: une égalité fausse, qui confirme qu'il n'y a pas de point d'intersection.

Réponse. Aucun point d'intersection : droites strictement parallèles ($y = 2x - 3$ et $y = 2x + \frac{1}{2}$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : droite passant par deux points

a) Coefficient directeur :

$$m = \frac{-2-4}{3-(-1)} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

— Avec $A(-1\,;4)$: $4 = -\frac{3}{2}\times(-1) + p = \frac{3}{2} + p$, donc $p = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

— L’équation réduite est $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$.

b) On ramène tout d’un côté et on multiplie par 2 pour éliminer les fractions :

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2y = -3x + 5 \Leftrightarrow 3x + 2y - 5 = 0$$

c) On teste les coordonnées de C dans l’équation cartésienne :
$3\times 5 + 2\times(-5) - 5 = 15 - 10 - 5 = 0$.

— L’égalité est vérifiée : C appartient à (AB). Les points A, B et C sont donc alignés.

Réponse. a) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ · b) $3x + 2y - 5 = 0$ · c) oui, $C \in (AB)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).