

Plaquette 1 - Équations de droites, parallélisme et intersections

Droites du plan — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules et méthodes pour les droites.

- **Équation réduite** d'une droite non verticale : $y = mx + p$ où m est le **coefficient directeur** et p l'**ordonnée à l'origine**.
- Coefficient directeur à partir de deux points A et B (avec $x_A \neq x_B$) :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

- Une droite **verticale** a pour équation $x = k$: elle n'a pas de coefficient directeur.
- **Équation cartésienne** : $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$; un vecteur directeur est $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.
- Deux droites non verticales sont **parallèles** si et seulement si elles ont le même coefficient directeur ; elles sont **sécantes** sinon.
- Un point appartient à une droite si ses coordonnées vérifient son équation.
- Point d'intersection : on résout le **système** formé par les deux équations.

Correction de l'exercice 1 - Coefficient directeur et équation réduite

On calcule d'abord le coefficient directeur avec la formule du cours :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9 - 3}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$$

- L'équation est donc de la forme $y = 2x + p$.
- On détermine p en utilisant un point de la droite, par exemple $A(1; 3)$: $3 = 2 \times 1 + p$, donc $p = 1$.
- L'équation réduite est $y = 2x + 1$.
- Vérification avec B : $2 \times 4 + 1 = 9$, ce qui est bien l'ordonnée de B .

Réponse. $y = 2x + 1$.

Correction de l'exercice 2 - Droite donnée par un point et une pente

- L'équation est de la forme $y = -3x + p$.
- On remplace les coordonnées de A : $5 = -3 \times (-2) + p = 6 + p$.
- Donc $p = 5 - 6 = -1$.
- L'équation réduite est $y = -3x - 1$.
- Vérification : pour $x = -2$, $-3 \times (-2) - 1 = 6 - 1 = 5$. Correct.

Sens du coefficient. $m = -3 < 0$: la droite est décroissante ; quand x augmente de 1, y diminue de 3.

Réponse. $y = -3x - 1$.

Correction de l'exercice 3 - Appartenance à une droite

On remplace x par l'abscisse du point et on compare avec son ordonnée.

- Pour $C(3; 7) : 2 \times 3 + 1 = 7$, ce qui est l'ordonnée de C . Donc $C \in d$.
- Pour $D(0; 2) : 2 \times 0 + 1 = 1 \neq 2$. Donc $D \notin d$.
- Remarque : l'ordonnée à l'origine de d est 1, donc d coupe l'axe des ordonnées en $(0; 1)$, et non en $(0; 2)$.

Réponse. $C \in d$ mais $D \notin d$.

Correction de l'exercice 4 - De l'équation cartésienne à l'équation réduite

On isole y :

- $2x + 3y - 6 = 0$ donne $3y = -2x + 6$.
- En divisant par 3 :

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

- Le coefficient directeur est $-\frac{2}{3}$ et l'ordonnée à l'origine 2.
- Intersection avec l'axe des ordonnées : $x = 0$ donne $y = 2$, soit le point $(0; 2)$.
- Intersection avec l'axe des abscisses : $y = 0$ donne $-\frac{2}{3}x + 2 = 0$, soit $x = 3$, d'où le point $(3; 0)$.

Réponse. $y = -\frac{2}{3}x + 2$; points $(0; 2)$ et $(3; 0)$.

Correction de l'exercice 5 - Vecteur directeur

Formule du cours : pour $ax + by + c = 0$, un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

- Pour $d : a = 3$ et $b = -4$, donc $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- L'équation réduite de d s'obtient en isolant y : $4y = 3x + 5$, soit $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$. Son coefficient directeur est $\frac{3}{4}$.
- Pour la droite $y = \frac{3}{4}x + 1$, un vecteur directeur est $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$, ou plus simplement $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ (en multipliant par 4).
- Les deux droites ont le même coefficient directeur $\frac{3}{4}$: elles sont **parallèles**, ce que confirme le vecteur directeur commun.

Réponse. $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ pour les deux droites : elles sont parallèles.

Correction de l'exercice 6 - Reconnaître des droites parallèles

On met d_2 sous forme réduite pour comparer les coefficients directeurs.

- $4x - 2y + 7 = 0$ donne $2y = 4x + 7$, soit $y = 2x + 3,5$.
- d_1 a pour coefficient directeur 2, d_2 également : les droites sont **parallèles**.
- Elles ne sont pas confondues car leurs ordonnées à l'origine diffèrent (-3 et $3,5$) : le parallélisme est strict.

Réponse. Oui, parallèles (même coefficient directeur 2), et distinctes.

Correction de l'exercice 7 - Intersection de deux droites

Au point d'intersection, les deux équations sont vérifiées en même temps : les ordonnées sont égales.

- On résout $2x - 1 = -x + 5$.
- On ajoute x : $3x - 1 = 5$, puis on ajoute 1 : $3x = 6$, donc $x = 2$.
- On calcule y avec l'une des deux équations : $y = 2 \times 2 - 1 = 3$.
- Vérification avec l'autre : $-2 + 5 = 3$. Même valeur.
- Le point d'intersection est $I(2 ; 3)$.

Réponse. $I(2 ; 3)$.

Correction de l'exercice 8 - Système et intersection

On utilise la méthode par substitution.

- La deuxième équation donne $y = 3x - 5$.
- On remplace dans la première : $x + 2(3x - 5) = 4$, soit $x + 6x - 10 = 4$, donc $7x = 14$ et $x = 2$.
- Alors $y = 3 \times 2 - 5 = 1$.
- Vérification dans la première équation : $2 + 2 \times 1 = 4$. Correct.
- Interprétation : chaque équation représente une droite. Le système a une **unique** solution, donc les deux droites sont sécantes au point $(2 ; 1)$.

Réponse. $(x ; y) = (2 ; 1)$: les droites sont sécantes en $(2 ; 1)$.

Correction de l'exercice 9 - Droites verticales et horizontales

- La droite **verticale** est formée des points d'abscisse 3 : son équation est $x = 3$.
- La droite **horizontale** est formée des points d'ordonnée -2 : son équation est $y = -2$, c'est-à-dire $y = 0 \times x - 2$ (coefficient directeur nul).
- La droite verticale n'a pas de coefficient directeur : en prenant deux de ses points, $x_B - x_A = 0$ et le quotient $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ n'existe pas. Elle ne peut donc pas s'écrire $y = mx + p$, mais elle admet l'équation cartésienne $x - 3 = 0$.

Réponse. $x = 3$ et $y = -2$; pas de coefficient directeur pour la verticale (division par zéro).

Correction de l'exercice 10 - Problème : choisir un tarif

- a) Les deux prix sont des fonctions affines du nombre de séances :
- Formule A : $p_A(x) = 0,8x + 12$ (le 12 est payé une seule fois).
 - Formule B : $p_B(x) = 1,4x$.
- b) On cherche le nombre de séances pour lequel les deux prix sont égaux, ce qui revient à chercher l'intersection des deux droites.
- $0,8x + 12 = 1,4x$.
 - On retire $0,8x$: $12 = 0,6x$, donc $x = \frac{12}{0,6} = 20$.
 - Pour $x = 20$, les deux formules coûtent $1,4 \times 20 = 28$ €.
 - Au-delà, la formule A est moins chère : par exemple pour 30 séances, $p_A = 36$ € contre $p_B = 42$ €.
 - Conclusion : **à partir de 21 séances**, la formule A est strictement plus avantageuse (à 20 séances, les deux se valent).

Réponse. a) $p_A(x) = 0,8x + 12$ et $p_B(x) = 1,4x$ · b) à partir de 21 séances (égalité à 20 séances, 28 €).

Correction de l'exercice 11 - Synthèse : droite passant par deux points

a) Coefficient directeur :

$$m = \frac{-2 - 4}{3 - (-1)} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

— Avec $A(-1; 4)$: $4 = -\frac{3}{2} \times (-1) + p = \frac{3}{2} + p$, donc $p = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

— L'équation réduite est $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$.

b) On ramène tout d'un côté et on multiplie par 2 pour éliminer les fractions :

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2y = -3x + 5 \Leftrightarrow 3x + 2y - 5 = 0$$

c) On teste les coordonnées de C dans l'équation cartésienne :

$$3 \times 5 + 2 \times (-5) - 5 = 15 - 10 - 5 = 0.$$

— L'égalité est vérifiée : C appartient à (AB) . Les points A , B et C sont donc alignés.

Réponse. a) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ · b) $3x + 2y - 5 = 0$ · c) oui, $C \in (AB)$.