Plaquette 3 – Intersections de droites : calculer et interpréter

Droites du plan — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Positions relatives de $D : y = mx + p$ et $D' : y = m'x + p'$.

Coefficients	Droites	Points communs
$m \neq m'$	sécantes	**un** seul
$m = m'$ et $p \neq p'$	strictement parallèles	**aucun**
$m = m'$ et $p = p'$	confondues	**tous**

Calculer le point d'intersection. Si $m \neq m'$, l'abscisse du point commun vérifie

$$mx + p = m'x + p'$$

une équation du premier degré. On calcule ensuite l'ordonnée avec **l'une** des deux équations, et on contrôle avec **l'autre**.

Équation cartésienne. Si la droite est donnée par $ax + by + c = 0$ avec $b \neq 0$, on isole y pour obtenir l'équation réduite :

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Si $b = 0$, la droite est **verticale**, d'équation $x = -\frac{c}{a}$: elle coupe toute droite non verticale en un point d'abscisse connue.

Avec le déterminant. Les droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. Un vecteur directeur de $ax + by + c = 0$ est $(-b\,;a)$.

Une inconnue pour deux grandeurs. Quand un problème lie deux grandeurs par une relation $ax + by = c$ (un total, une somme), on **exprime l'une en fonction de l'autre**, par exemple $y = c - x$ si $a = b = 1$, puis on traduit la seconde information par une équation à une seule inconnue.

Formulation	Traduction
« au total n objets »	x et $n - x$
« x dépasse y de d »	$x = y + d$
« x est le double de y »	$x = 2y$
« pour un montant total M »	$px + q(n - x) = M$

Contrôle obligatoire. On remplace la solution dans **toutes** les données de l'énoncé, puis on vérifie qu'elle a un sens dans le contexte (nombre entier, positif…).

Correction de l'exercice 1 – Point d'intersection de deux droites

Les coefficients directeurs, 3 et $-\frac{1}{2}$, sont différents : les droites sont **sécantes**. Leur point commun a la même ordonnée sur les deux droites, donc son abscisse vérifie

$$3x - 5 = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2} \Leftrightarrow \frac{7}{2}x = \frac{21}{2} \Leftrightarrow x = 3$$

On calcule l'ordonnée avec D : $y = 3 \times 3 - 5 = 4$. Le point d'intersection est $(3\,;4)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle avec D' : $-\frac{3}{2}+\frac{11}{2}=\frac{8}{2}=4$ ✓. Sur la figure, les deux droites se croisent bien en $(3\,;4)$.

Réponse. $(3\,;4)$.

Correction de l'exercice 2 – Du cartésien au réduit, puis l'intersection

On écrit d'abord les équations réduites, en isolant y :

$$4x+3y-27=0 \Leftrightarrow y=-\frac{4}{3}x+9 \qquad 5x-2y-5=0 \Leftrightarrow y=\frac{5}{2}x-\frac{5}{2}$$

Les coefficients directeurs sont différents : les droites sont sécantes. L'abscisse du point commun vérifie

$$-\frac{4}{3}x+9=\frac{5}{2}x-\frac{5}{2}$$

On multiplie par 6 pour supprimer les fractions : $-8x+54=15x-15$, soit $23x=69$ et $x=3$. Puis $y=-4+9=5$.

Contrôle dans les équations de départ : $12+15-27=0$ ✓ et $15-10-5=0$ ✓. Le point d'intersection est $(3\,;5)$.

Réponse. $(3\,;5)$.

Correction de l'exercice 3 – Droites strictement parallèles

Par les équations réduites. $D : y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{6}$ et $D' : y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$. Même coefficient directeur $\frac{1}{3}$, ordonnées à l'origine différentes : les droites sont **strictement parallèles**, elles n'ont aucun point commun.

Par le déterminant. Des vecteurs directeurs sont $\vec{u}(6\,;2)$ pour D et $\vec{v}(-3\,;-1)$ pour D' :

$$\det(\vec{u},\vec{v})=6\times(-1)-(-3)\times 2=-6+6=0$$

Les vecteurs sont colinéaires, les droites parallèles. Elles ne sont pas confondues : le point $(0\,;\frac{4}{3})$ de D' donne $0-8-5=-13\neq 0$ dans l'équation de D.

Ce qu'il ne faut pas faire. Écrire $\frac{1}{3}x-\frac{5}{6}=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$ et « résoudre » : les x disparaissent et il reste $-\frac{5}{6}=\frac{4}{3}$, une égalité fausse. C'est la signature de deux droites strictement parallèles.

Réponse. Non : même coefficient directeur $\frac{1}{3}$ et ordonnées à l'origine différentes ($\det=0$) ; les droites sont strictement parallèles.

Correction de l'exercice 4 – Deux équations pour une même droite

On écrit les deux équations réduites :

$$3x-2y-7=0 \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}x-\frac{7}{2} \qquad -9x+6y+21=0 \Leftrightarrow y=\frac{9}{6}x-\frac{21}{6}=\frac{3}{2}x-\frac{7}{2}$$

Même coefficient directeur et même ordonnée à l'origine : les deux équations décrivent la **même droite** (les droites sont confondues). On le voyait aussi directement : la seconde équation est la première multipliée par -3.

Trois points : $x=1$ donne $y=-2$, $x=3$ donne $y=1$, $x=5$ donne $y=4$. **Contrôle** de $(3\,;1)$ dans la seconde équation : $-27+6+21=0$ ✓.

Une équation cartésienne n'est donc **pas unique** : on peut la multiplier par n'importe quel réel non nul. L'équation réduite, elle, est unique.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Même équation réduite $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$; par exemple $(1\,;-2)$, $(3\,;1)$, $(5\,;4)$.

Correction de l'exercice 5 – Deux tarifs d'abonnement

Pour n séances, la formule A coûte $12n$ € et la formule B $4n + 80$ €. Les deux coûtent autant quand

$$12n = 4n + 80 \Leftrightarrow 8n = 80 \Leftrightarrow n = 10$$

soit 120 € pour les deux. Au-delà, B est moins chère : elle devient avantageuse à partir de 11 séances.

Contrôle : 11 séances coûtent 132 € avec A et 124 € avec B ; 9 séances, 108 € contre 116 €. Graphiquement, la droite de B, moins pentue (4 contre 12), passe sous celle de A après leur point commun $(10\,;120)$.

Réponse. À partir de 11 séances (égalité à 10 séances, pour 120 €).

Correction de l'exercice 6 – Problème de billets

On note a le nombre de places adultes. Comme il y a 150 billets au total, il y a $150 - a$ places enfants. La recette s'écrit

$$10a + 6(150 - a) = 1\,290 \Leftrightarrow 4a + 900 = 1\,290 \Leftrightarrow 4a = 390 \Leftrightarrow a = 97{,}5$$

Un nombre de billets doit être entier : les données sont **incompatibles**.

Pourquoi. La recette vaut $900 + 4a$; elle ne peut prendre que des valeurs qui dépassent 900 d'un multiple de 4, comme 1 288 € ($a = 97$) ou 1 292 € ($a = 98$). Or $1\,290 - 900 = 390$ n'est pas divisible par 4 : la recette annoncée contient une erreur.

Réponse. Aucune solution entière : $4a = 390$ donne $a = 97{,}5$ — la recette annoncée est incompatible (1 288 ou 1 292 € seraient possibles).

Correction de l'exercice 7 – Problème de mélange

On note x la masse, en kg, du thé à 18 €/kg ; il y a donc $20 - x$ kg de thé à 30 €/kg. Le mélange coûte au total $20 \times 24{,}60 = 492$ €, d'où

$$18x + 30(20 - x) = 492 \Leftrightarrow 600 - 12x = 492 \Leftrightarrow 12x = 108 \Leftrightarrow x = 9$$

Il faut 9 kg de thé à 18 €/kg et 11 kg à 30 €/kg.

Contrôle : $162 + 330 = 492$ € ✓. Le prix visé, 24,60 €, est un peu au-dessus du milieu 24 € : il faut un peu plus de thé cher, ce qui est le cas.

Réponse. 9 kg de thé à 18 €/kg et 11 kg à 30 €/kg.

Correction de l'exercice 8 – Problème d'âges

On note f l'âge actuel du fils. Dans 5 ans, le père aura $2(f + 5)$ ans : il a donc aujourd'hui

$$p = 2(f + 5) - 5 = 2f + 5$$

Il y a 5 ans, le père avait $p - 5 = 2f$ ans et le fils $f - 5$ ans. La seconde information s'écrit

$$2f = 3(f - 5) \Leftrightarrow 2f = 3f - 15 \Leftrightarrow f = 15$$

puis $p = 2 \times 15 + 5 = 35$. Le père a 35 ans et le fils 15 ans.

Contrôle : dans 5 ans, $40 = 2 \times 20$ ✓ ; il y a 5 ans, $30 = 3 \times 10$ ✓. L'écart d'âge, 20 ans, ne change jamais.

Réponse. Le père a 35 ans et le fils 15 ans.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 9 – Équations à coefficients fractionnaires

On supprime d’abord les fractions : on multiplie l’équation de D par 6 et celle de D' par 4.

$$D : 3x + 2y = 24 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + 12 \qquad D' : x - 2y = -4 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

Les coefficients directeurs diffèrent : les droites sont sécantes. L’abscisse du point commun vérifie

$$-\frac{3}{2}x + 12 = \frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow 10 = 2x \Leftrightarrow x = 5$$

puis $y = \frac{5}{2} + 2 = 4{,}5$. Le point d’intersection est $(5\,;4{,}5)$.

Contrôle dans les équations d’origine : $\frac{5}{2} + \frac{4{,}5}{3} = 2{,}5 + 1{,}5 = 4$ ✓ et $\frac{5}{4} - \frac{4{,}5}{2} = 1{,}25 - 2{,}25 = -1$ ✓.

Réponse. $(5\,;4{,}5)$.

Correction de l’exercice 10 – Déterminer un paramètre

a) Des vecteurs directeurs sont $\vec{u}(-k\,;2)$ pour D_k et $\vec{v}(4\,;3)$ pour Δ. Les droites sont parallèles si et seulement si

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = -k \times 3 - 4 \times 2 = -3k - 8 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{8}{3}$$

Pour cette valeur, $D_k : 2x - \frac{8}{3}y - 6 = 0$, soit $y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$, et $\Delta : y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$. Ordonnées à l’origine différentes : les droites sont **strictement parallèles**, pas confondues.

b) Pour $k = 1$: $D_1 : y = -2x + 6$ et $\Delta : y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$. L’abscisse commune vérifie

$$-2x + 6 = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{25}{4} = \frac{11}{4}x \Leftrightarrow x = \frac{25}{11}$$

puis $y = -\frac{50}{11} + \frac{66}{11} = \frac{16}{11}$. **Contrôle** dans Δ : $\frac{75}{11} - \frac{64}{11} - \frac{11}{11} = 0$ ✓.

Réponse. a) $k = -\frac{8}{3}$: droites strictement parallèles · b) $\left(\frac{25}{11}\,;\frac{16}{11}\right)$.

Correction de l’exercice 11 – Problème de vitesse

On note c la vitesse du courant et b la vitesse propre du bateau, en km/h. À la descente, les vitesses s’ajoutent : $b + c = \frac{48}{3} = 16$, donc $b = 16 - c$. À la remontée, elles se soustraient : $b - c = \frac{48}{6} = 8$. En remplaçant b :

$$(16 - c) - c = 8 \Leftrightarrow 16 - 2c = 8 \Leftrightarrow c = 4$$

puis $b = 16 - 4 = 12$. Le bateau va à 12 km/h et le courant à 4 km/h.

Contrôle : $\frac{48}{16} = 3$ h ✓ et $\frac{48}{8} = 6$ h ✓. La vitesse moyenne sur l’aller-retour vaut $\frac{96}{9} \approx 10{,}7$ km/h, et non 12 km/h : on passe plus de temps à la remontée.

Réponse. Bateau 12 km/h, courant 4 km/h.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 12 – Lire puis calculer une intersection

a) D_1 : coefficient directeur $\frac{5-3}{2-0} = 1$, ordonnée à l'origine 3, d'où $y = x + 3$. D_2 : coefficient directeur $\frac{3-15}{6-0} = -2$, ordonnée à l'origine 15, d'où $y = -2x + 15$.

b) L'abscisse du point commun vérifie

$$x + 3 = -2x + 15 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$$

puis $y = 4 + 3 = 7$. **Contrôle** avec D_2 : $-8 + 15 = 7$ ✓.

Le point d'intersection est $(4\,;7)$, ce que la figure laisse voir. Ici la lecture tombe juste parce que les coordonnées sont entières ; en général, seul le calcul donne les **valeurs exactes**.

Réponse. a) $y = x + 3$ et $y = -2x + 15$ · b) $(4\,;7)$.

Correction de l'exercice 13 – Trois droites et un triangle

On cherche les points d'intersection deux à deux. $y = x$ et $y = 3$ se coupent en $(3\,;3)$. $y = -2x + 9$ et $y = 3$ se coupent quand $-2x + 9 = 3$, soit $x = 3$: encore $(3\,;3)$.

$$x = -2x + 9 \Leftrightarrow x = 3$$

La troisième intersection, entre $y = x$ et $y = -2x + 9$, est aussi $(3\,;3)$. Les trois droites sont **concourantes** : elles ne forment aucun triangle.

Avec $y = 1$ au lieu de $y = 3$, on obtiendrait un vrai triangle de sommets $(1\,;1)$, $(4\,;1)$ et $(3\,;3)$, d'aire $\frac{3 \times 2}{2} = 3$. Avant de chercher un triangle, on vérifie que les droites ne sont pas concourantes.

Réponse. Aucun triangle : les trois droites sont concourantes en $(3\,;3)$.

Correction de l'exercice 14 – Point d'intersection et position d'un point

a) L'abscisse du point commun vérifie $-x + 12 = 2x - 6$, soit $3x = 18$ et $x = 6$; puis $y = -6 + 12 = 6$. **Contrôle** : $2 \times 6 - 6 = 6$ ✓. Donc $E(6\,;6)$.

b) On compare l'ordonnée de E à celle du point de D de **même abscisse** :

$$\frac{3}{2} \times 6 - \frac{5}{2} = 9 - 2{,}5 = 6{,}5$$

Le point de D d'abscisse 6 a pour ordonnée $6{,}5 > 6$: le point E est **au-dessous** de D.

À retenir. Un point $M(x_0\,;y_0)$ est au-dessus de la droite $y = mx + p$ si $y_0 > mx_0 + p$, au-dessous si $y_0 < mx_0 + p$, sur la droite en cas d'égalité.

Réponse. a) $E(6\,;6)$ · b) au-dessous, car $6 < 6{,}5$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : choisir un fournisseur

a) $C_1(n) = 9n + 40$, $C_2(n) = 15n$ et $C_3(n) = 6n + 100$, en euros.

b) Trois intersections, chacune par une équation du premier degré :

Droites	Équation	Abscisse
C_1 et C_2	$9n + 40 = 15n$	$n = \frac{40}{6} \approx 6{,}7$
C_1 et C_3	$9n + 40 = 6n + 100$	$n = 20$
C_2 et C_3	$15n = 6n + 100$	$n = \frac{100}{9} \approx 11{,}1$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Le nombre de composants est entier. Jusqu'à 6 composants, le fournisseur 2 est le moins cher (pente la plus forte mais pas de frais) ; de 7 à 19, le fournisseur 1 ; à 20, les fournisseurs 1 et 3 sont à égalité (220 €) ; à partir de 21, le fournisseur 3, dont la pente est la plus faible.

Contrôle : pour $n = 10$, $C_1 = 130$, $C_2 = 150$, $C_3 = 160$ € ✓ ; pour $n = 6$, $C_2 = 90 < C_1 = 94$ € ✓ ; pour $n = 25$, $C_3 = 250 < C_1 = 265$ € ✓.

d) On résout chaque inéquation $C(n) \le 200$: $9n + 40 \le 200$ donne $n \le \dfrac{160}{9} \approx 17{,}8$, soit 17 composants ; $15n \le 200$ donne $n \le \dfrac{40}{3} \approx 13{,}3$, soit 13 ; $6n + 100 \le 200$ donne $n \le \dfrac{50}{3} \approx 16{,}7$, soit 16. Le fournisseur 1 en donne le plus : 17 composants.

Réponse. a) $C_1 = 9n + 40$, $C_2 = 15n$, $C_3 = 6n + 100$ · b) $n \approx 6{,}7$; 20 ; $\approx 11{,}1$ · c) F2 jusqu'à 6, F1 de 7 à 19, égalité F1/F3 à 20, F3 au-delà · d) fournisseur 1, 17 composants.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).