

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : configurations et optimisation

Droites du plan — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les droites remarquables d'un triangle.

Droite	Définition	Comment l'obtenir
médiane	relie un sommet au milieu du côté opposé	deux points
hauteur	relie un sommet, perpendiculaire au côté opposé	un point et une perpendicularité
médiatrice	perpendiculaire à un côté en son milieu	un point et une perpendicularité
bissectrice	partage un angle en deux	hors programme en Seconde

Points de concours.

Droites	Point de concours
les trois médianes	centre de gravité G
les trois hauteurs	orthocentre H
les trois médiatrices	centre du cercle circonscrit Ω

Régionnement du plan. Une droite $ax + by + c = 0$ partage le plan en deux **demi-plans**. Pour savoir lequel correspond à $ax + by + c > 0$, on **teste un point** simple (souvent l'origine) et on regarde le signe obtenu.

Système d'inéquations. L'ensemble des solutions est l'**intersection** des demi-plans : un polygone convexe, éventuellement non borné. Ses **sommets** sont les intersections des droites frontières prises deux à deux.

Optimisation linéaire. Pour maximiser une quantité $ax + by$ sur un polygone, on évalue cette quantité en chaque **sommet** : l'optimum y est atteint. C'est un résultat admis, très efficace.

Deux réflexes de rédaction.

- Écrire les équations de **toutes** les droites en jeu avant de résoudre.
- Vérifier chaque sommet trouvé dans **toutes** les contraintes, pas seulement dans les deux qui l'ont produit.

Correction de l'exercice 1 - Les trois hauteurs d'un triangle

- **Hauteur issue de A** : perpendiculaire à $[BC]$ ✓
- **Vecteur** $\overrightarrow{BC}$: $(-4; 4)$, simplifié en $(-1; 1)$ ✓
- **Condition** : $-1 \times (x - 0) + 1 \times (y - 0) = 0$ ✓
- **Équation** : $-x + y = 0$, soit

$$y = x$$

- **Hauteur issue de B** : perpendiculaire à $[AC]$ ✓
- **Vecteur** $\overrightarrow{AC}$: $(2; 4)$, simplifié en $(1; 2)$ ✓
- **Condition** : $1 \times (x - 6) + 2 \times (y - 0) = 0$ ✓

- **Équation** : $x + 2y - 6 = 0$, soit $y = -\frac{x}{2} + 3$ ✓
- **Contrôle en B** : $6 - 6 = 0$ ✓
- **Système** : $y = x$ et $x + 2y = 6$ ✓
- **Substitution** : $3x = 6$, donc $x = 2$ ✓
- **Orthocentre** :

$$H(2; 2)$$

- **Contrôle dans la première hauteur** : $2 = 2$ ✓
- **Contrôle dans la seconde** : $2 + 4 - 6 = 0$ ✓
- **Contrôle par la troisième hauteur** : issue de C, perpendiculaire à $[AB]$ horizontal, donc verticale ✓
- **Équation** : $x = 2$ ✓
- **Vérification** : $H(2; 2)$ y appartient ✓
- **Conclusion** : les trois hauteurs sont bien concourantes en $H(2; 2)$ ✓

Réponse. $y = x$ et $x + 2y - 6 = 0$, concourantes en l'orthocentre $H(2; 2)$.

Correction de l'exercice 2 - Centre du cercle circonscrit

- **Médiatrice de $[AB]$** : $[AB]$ est horizontal, son milieu est $(3; 0)$ ✓
- **Équation** : $x = 3$ ✓
- **Médiatrice de $[AC]$** : milieu $(1; 2)$, perpendiculaire à $\overrightarrow{AC}(1; 2)$ ✓
- **Condition** : $1(x - 1) + 2(y - 2) = 0$ ✓
- **Développement** : $x - 1 + 2y - 4 = 0$, soit $x + 2y - 5 = 0$ ✓
- **Contrôle au milieu** : $1 + 4 - 5 = 0$ ✓
- **Système** : $x = 3$ et $x + 2y = 5$ ✓
- **Substitution** : $3 + 2y = 5$, donc $y = 1$ ✓
- **Centre** :

$$\Omega(3; 1)$$

- **Rayon** : $\Omega A = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10} \approx 3,162$ ✓
- **Contrôle** : $\Omega B = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$ ✓
- **Contrôle** : $\Omega C = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$ ✓
- **Cohérence** : les trois sommets sont bien équidistants ✓
- **Équation du cercle** : $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 10$ ✓
- **Comparaison avec l'orthocentre** : $H(2; 2)$ et $\Omega(3; 1)$ sont distincts ✓
- **Centre de gravité** : $G\left(\frac{0+6+2}{3}; \frac{0+0+4}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right)$ ✓
- **Alignement de H, G, Ω** : $\overrightarrow{HG} = \left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ et $\overrightarrow{H\Omega} = (1; -1)$, de déterminant nul ✓
- **Conclusion** : ils sont alignés sur la **droite d'Euler** ✓

Réponse. $\Omega(3; 1)$, de rayon $\sqrt{10} \approx 3,162$.

Correction de l'exercice 3 - Régionnement du plan

- **Droite frontière** : $2x - 3y + 6 = 0$ ✓
- **Forme réduite** : $3y = 2x + 6$, donc $y = \frac{2}{3}x + 2$ ✓
- **Test de l'origine** : $0 - 0 + 6 = 6 > 0$ ✓
- **Conclusion** : l'origine appartient à l'ensemble ✓
- **Description** : le demi-plan **contenant l'origine**, frontière **exclue** ✓

- **Position par rapport à la droite** : en $x = 0$, la frontière est à $y = 2$ ✓
- **Or** : l'origine a $y = 0 < 2$ ✓
- **Conclusion plus précise** : c'est le demi-plan situé **sous** la droite ✓
- **Contrôle algébrique** : $2x - 3y + 6 > 0$ équivaut à $y < \frac{2}{3}x + 2$ ✓
- **Attention** : la division par -3 inverse le sens de l'inégalité ✓
- **Test d'un autre point** : $(0; 5)$ donne $-15 + 6 = -9 < 0$ ✓
- **Cohérence** : $(0; 5)$ est au-dessus de la droite, donc hors de l'ensemble ✓
- **Test de $(3; 4)$** : $6 - 12 + 6 = 0$ ✓
- **Conclusion** : ce point est **sur** la frontière, donc exclu ✓
- **Test de $(3; 3)$** : $6 - 9 + 6 = 3 > 0$ ✓
- **Points de la frontière** : $(0; 2)$ et $(-3; 0)$ ✓
- **Contrôles** : $-6 + 6 = 0$ ✓ et $-6 + 6 = 0$ ✓

Réponse. Le demi-plan ouvert sous la droite $y = \frac{2}{3}x + 2$, c'est-à-dire $y < \frac{2}{3}x + 2$.

Correction de l'exercice 4 - Système de deux inéquations

- **Première contrainte** : le demi-plan **sous** la droite $y = -x + 8$, frontière incluse ✓
- **Seconde contrainte** : le demi-plan **au-dessus** de $y = 2x - 4$, frontière incluse ✓
- **Intersection des frontières** : $-x + 8 = 2x - 4$ ✓
- **Résolution** : $3x = 12$, donc $x = 4$ ✓
- **Ordonnée** : $y = -4 + 8 = 4$ ✓
- **Sommet** :

$$S(4; 4)$$

- **Contrôle** : $2 \times 4 - 4 = 4$ ✓
- **Nature de la région** : un **secteur angulaire** non borné, ouvert vers la gauche ✓
- **Test de l'origine** : $0 \leq 8$ ✓ et $0 \geq -4$ ✓
- **Conclusion** : l'origine appartient à la région ✓
- **Test de $(10; 0)$** : $0 \leq -2$ est **faux** ✓
- **Conclusion** : ce point est hors de la région ✓
- **Test de $(0; 10)$** : $10 \leq 8$ est **faux** ✓
- **Conclusion** : hors de la région également ✓
- **Test de $(-5; 0)$** : $0 \leq 13$ ✓ et $0 \geq -14$ ✓
- **Conclusion** : dans la région, ce qui confirme l'ouverture vers la gauche ✓
- **Hauteur de la région en $x = 0$** : de -4 à 8 , soit 12 unités ✓
- **Hauteur en $x = -5$** : de -14 à 13 , soit 27 unités ✓
- **Cohérence** : la région s'élargit vers la gauche ✓

Réponse. Un secteur angulaire non borné de sommet $S(4; 4)$, ouvert vers la gauche.

Correction de l'exercice 5 - Polygone des contraintes

- **Contraintes de positivité** : la région est dans le premier quadrant ✓
- **Premier sommet** : l'origine $(0; 0)$ ✓
- **Contrôles** : $0 \leq 10$ ✓ et $0 \leq 14$ ✓
- **Deuxième sommet** : intersection de $y = 0$ et de $2x + y = 14$ ✓
- **Calcul** : $x = 7$, donc le point $(7; 0)$ ✓
- **Contrôle de l'autre contrainte** : $7 + 0 = 7 \leq 10$ ✓

- **Troisième sommet** : intersection de $x + y = 10$ et $2x + y = 14$ ✓
- **Soustraction** : $x = 4$ ✓
- **Ordonnée** : $y = 6$ ✓
- **Point** : $(4; 6)$ ✓
- **Contrôles** : $4 + 6 = 10$ ✓ et $8 + 6 = 14$ ✓
- **Quatrième sommet** : intersection de $x = 0$ et $x + y = 10$ ✓
- **Point** : $(0; 10)$ ✓
- **Contrôle de l'autre contrainte** : $0 + 10 = 10 \leq 14$ ✓
- **Les quatre sommets** :

$$(0; 0), (7; 0), (4; 6), (0; 10)$$

- **Point écarté** : l'intersection de $y = 0$ et $x + y = 10$, soit $(10; 0)$ ✓
- **Raison** : $2 \times 10 + 0 = 20 > 14$, la contrainte est violée ✓
- **Aire du polygone** : en découpant en triangles depuis l'origine,
 $\frac{7 \times 6}{2} + \frac{10 \times 4}{2} = 21 + 20 = 41$ ✓

Réponse. $(0; 0)$, $(7; 0)$, $(4; 6)$ et $(0; 10)$.

Correction de l'exercice 6 - Optimisation sur un polygone

- **Principe admis** : l'optimum d'une expression linéaire est atteint en un **sommet** ✓
- **Sommets à tester** : $(0; 0)$, $(7; 0)$, $(4; 6)$, $(0; 10)$ ✓
- **En** $(0; 0)$: $P = 0$ ✓
- **En** $(7; 0)$: $P = 21$ ✓
- **En** $(4; 6)$: $P = 12 + 24 = 36$ ✓
- **En** $(0; 10)$: $P = 40$ ✓
- **Maximum** :

$$P_{\max} = 40 \text{ au sommet } (0; 10)$$

- **Contrôle de vraisemblance** : le coefficient de y étant le plus grand, le sommet le plus « haut » est favorisé ✓
- **Test d'un point intérieur** : $(3; 3)$ donne $9 + 12 = 21 < 40$ ✓
- **Test d'un autre** : $(2; 8)$ donne $6 + 32 = 38 < 40$ ✓
- **Vérification de la faisabilité de** $(2; 8)$: $2 + 8 = 10$ ✓ et $4 + 8 = 12 \leq 14$ ✓
- **Minimisation, pour comparaison** : $P_{\min} = 0$ en $(0; 0)$ ✓
- **Changement d'objectif** : avec $P' = 5x + 2y$, on obtient 0, 35, 32 et 20 ✓
- **Nouveau maximum** : 35 en $(7; 0)$ ✓
- **Leçon** : le sommet optimal **dépend** des coefficients de l'objectif ✓
- **Cas d'égalité** : avec $P'' = x + y$, les sommets $(4; 6)$ et $(0; 10)$ donnent tous deux 10 ✓
- **Interprétation** : tout le segment entre eux est alors optimal ✓

Réponse. $P_{\max} = 40$, atteint au sommet $(0; 10)$.

Correction de l'exercice 7 - Problème de production

- **Inconnues** : t le nombre de tables, c celui de chaises ✓
- **Contrainte de temps** : $3t + c \leq 30$ ✓
- **Contrainte de nombre** : $t + c \leq 20$ ✓
- **Positivité** : $t \geq 0$ et $c \geq 0$ ✓
- **Bénéfice à maximiser** : $B = 60t + 25c$ ✓

- **Sommets du polygone** : l'origine $(0; 0)$ ✓
- **Sur l'axe des tables** : $3t = 30$ donne $(10; 0)$ ✓
- **Contrôle** : $10 \leq 20$ ✓
- **Intersection des deux contraintes** : $3t + c = 30$ et $t + c = 20$ ✓
- **Soustraction** : $2t = 10$, donc $t = 5$ et $c = 15$ ✓
- **Sur l'axe des chaises** : $(0; 20)$ ✓
- **Contrôle** : $0 + 20 = 20 \leq 30$ ✓
- **Évaluation du bénéfice** : $(0; 0)$ donne 0 € ✓
- **En $(10; 0)$** : 600 € ✓
- **En $(5; 15)$** : $300 + 375 = 675$ € ✓
- **En $(0; 20)$** : 500 € ✓
- **Maximum** :

$$B_{\max} = 675 \text{ € pour } 5 \text{ tables et } 15 \text{ chaises}$$

- **Contrôle des contraintes** : $15 + 15 = 30$ h ✓ et $5 + 15 = 20$ meubles ✓
- **Saturation** : les **deux** contraintes sont saturées, ce qui est typique de l'optimum ✓
- **Bénéfice horaire moyen** : $\frac{675}{30} = 22,50$ €/h ✓

Réponse. 5 tables et 15 chaises, pour 675 € de bénéfice.

Correction de l'exercice 8 - Droite d'Euler

- **Le triangle est rectangle en A** : ses côtés sont sur les axes ✓
- **Orthocentre d'un triangle rectangle** : c'est le sommet de l'angle droit ✓
- **Donc** : $H(0; 0) = A$ ✓
- **Centre de gravité** : $G\left(\frac{0+8+0}{3}; \frac{0+0+6}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}; 2\right)$ ✓
- **Centre du cercle circonscrit** : le milieu de l'hypoténuse $[BC]$ ✓
- **Calcul** : $\Omega(4; 3)$ ✓
- **Rayon** : $\frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{64+36}}{2} = \frac{10}{2} = 5$ ✓
- **Contrôle** : $\Omega A = \sqrt{16+9} = 5$ ✓
- **Alignement** : $\overrightarrow{HG} = \left(\frac{8}{3}; 2\right)$ et $\overrightarrow{H\Omega} = (4; 3)$ ✓
- **Déterminant** : $\frac{8}{3} \times 3 - 4 \times 2 = 8 - 8 = 0$ ✓
- **Conclusion** : H , G et Ω sont **alignés** sur la droite d'Euler ✓
- **Coefficient** : $\overrightarrow{H\Omega} = \frac{3}{2}\overrightarrow{HG}$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{3}{2} \times \frac{8}{3} = 4$ ✓ et $\frac{3}{2} \times 2 = 3$ ✓
- **Relation générale** : $\overrightarrow{H\Omega} = \frac{3}{2}\overrightarrow{HG}$ dans **tout** triangle ✓
- **Équation de la droite d'Euler** : elle passe par l'origine, avec une pente de $\frac{3}{4}$ ✓
- **Donc** : $y = \frac{3}{4}x$ ✓
- **Contrôles** : G donne $\frac{3}{4} \times \frac{8}{3} = 2$ ✓ et Ω donne $\frac{3}{4} \times 4 = 3$ ✓

Réponse. $H(0; 0)$, $G\left(\frac{8}{3}; 2\right)$ et $\Omega(4; 3)$, alignés sur $y = \frac{3}{4}x$ avec $\overrightarrow{H\Omega} = \frac{3}{2}\overrightarrow{HG}$.

Correction de l'exercice 9 - Deux droites et un carré

- **Distance entre les deux parallèles** : c'est le côté du carré ✓
- **Point de la première** : $(0; 1)$ ✓
- **Perpendiculaire par ce point** : pente $-\frac{1}{2}$ ✓
- **Équation** : $y = -\frac{1}{2}x + 1$ ✓
- **Intersection avec la seconde parallèle** : $-\frac{1}{2}x + 1 = 2x + 11$ ✓
- **Résolution** : $-\frac{5}{2}x = 10$, donc $x = -4$ ✓
- **Ordonnée** : $y = 2 + 1 = 3$ ✓
- **Point** : $(-4; 3)$ ✓
- **Longueur du côté** : $\sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4,472$ ✓
- **Deux perpendiculaires à trouver** : de pente $-\frac{1}{2}$, distantes de $2\sqrt{5}$ ✓
- **Première** : $y = -\frac{1}{2}x + 1$, déjà obtenue ✓
- **Pour la seconde** : on translate le long de la première parallèle ✓
- **Vecteur directeur unitaire de** $y = 2x + 1$: $\frac{1}{\sqrt{5}}(1; 2)$ ✓
- **Déplacement de** $2\sqrt{5}$: $(2; 4)$ ✓
- **Nouveau point** : $(0 + 2; 1 + 4) = (2; 5)$ ✓
- **Seconde perpendiculaire** : $y = -\frac{1}{2}x + p$ avec $5 = -1 + p$, donc $p = 6$ ✓
- **Équation** :

$$y = -\frac{1}{2}x + 6$$

- **Vérification du carré** : ses quatre sommets sont $(0; 1)$, $(2; 5)$, $(-2; 7)$ et $(-4; 3)$ ✓
- **Contrôle des côtés** : chacun mesure $\sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$ ✓

Réponse. $y = -\frac{1}{2}x + 1$ et $y = -\frac{1}{2}x + 6$; le carré a pour côté $2\sqrt{5} \approx 4,47$.

Correction de l'exercice 10 - Symétrique d'une droite

- **Symétrie d'axe** (Oy) : $(x; y)$ devient $(-x; y)$ ✓
- **Méthode** : dans l'équation, on remplace x par $-x$ ✓
- **Calcul** : $y = 3(-x) - 2$ ✓
- **Équation de l'image** :

$$y = -3x - 2$$

- **Contrôle** : le point $(1; 1)$ de la droite d'origine a pour image $(-1; 1)$ ✓
- **Vérification** : $-3 \times (-1) - 2 = 1$ ✓
- **Observation** : l'ordonnée à l'origine est **inchangée** ✓
- **Explication** : le point $(0; -2)$ est sur l'axe de symétrie ✓
- **Pente** : elle change de **signe** ✓
- **Symétrie de centre** O : $(x; y)$ devient $(-x; -y)$ ✓
- **Méthode** : on remplace x par $-x$ et y par $-y$ ✓
- **Calcul** : $-y = -3x - 2$ ✓
- **Équation de l'image** :

$$y = 3x + 2$$

- **Contrôle** : l'image de $(1; 1)$ est $(-1; -1)$ ✓
- **Vérification** : $-3 + 2 = -1$ ✓
- **Observation** : la pente est **inchangée**, l'ordonnée à l'origine change de signe ✓
- **Cohérence** : une symétrie centrale transforme une droite en une **parallèle** ✓

Réponse. Par l'axe (Oy) : $y = -3x - 2$ · par le centre O : $y = 3x + 2$.

Correction de l'exercice 11 - Faisceau de droites

- **Stratégie** : regrouper les termes en m ✓
- **Réécriture** : $2mx + x + my - 3y - 7m + 2 = 0$ ✓
- **Factorisation** : $m(2x + y - 7) + (x - 3y + 2) = 0$ ✓
- **Condition d'indépendance en m** : les deux parenthèses doivent être nulles ✓
- **Système** : $2x + y = 7$ et $x - 3y = -2$ ✓
- **Substitution** : $y = 7 - 2x$, donc $x - 3(7 - 2x) = -2$ ✓
- **Développement** : $x - 21 + 6x = -2$, soit $7x = 19$ ✓
- **Résolution** : $x = \frac{19}{7} \approx 2,714$ ✓
- **Ordonnée** : $y = 7 - \frac{38}{7} = \frac{11}{7} \approx 1,571$ ✓
- **Point commun** :

$$P\left(\frac{19}{7}; \frac{11}{7}\right)$$

- **Contrôle de la première équation** : $\frac{38}{7} + \frac{11}{7} = \frac{49}{7} = 7$ ✓
- **Contrôle de la seconde** : $\frac{19}{7} - \frac{33}{7} = -\frac{14}{7} = -2$ ✓
- **Vérification pour $m = 0$** : $x - 3y + 2 = 0$, et $\frac{19}{7} - \frac{33}{7} + 2 = 0$ ✓
- **Vérification pour $m = 1$** : $3x - 2y - 5 = 0$, et $\frac{57}{7} - \frac{22}{7} - 5 = \frac{35}{7} - 5 = 0$ ✓
- **Vérification pour $m = 3$** : $7x + 0y - 19 = 0$, soit $x = \frac{19}{7}$ ✓
- **Remarque** : pour $m = 3$ la droite est **verticale** ✓
- **Conclusion** : toutes ces droites forment le **faisceau** des droites passant par P ✓

Réponse. Elles passent toutes par $P\left(\frac{19}{7}; \frac{11}{7}\right)$.

Correction de l'exercice 12 - Trois droites formant un triangle

- **Premier sommet** : intersection des deux premières ✓
- **Équation** : $x + 2 = -2x + 11$, donc $3x = 9$ et $x = 3$ ✓
- **Sommet** : $A(3; 5)$ ✓
- **Deuxième sommet** : intersection de la première et de la troisième ✓
- **Équation** : $x + 2 = \frac{1}{2}x - 1$, donc $\frac{1}{2}x = -3$ et $x = -6$ ✓
- **Sommet** : $B(-6; -4)$ ✓
- **Troisième sommet** : intersection de la deuxième et de la troisième ✓
- **Équation** : $-2x + 11 = \frac{1}{2}x - 1$, donc $\frac{5}{2}x = 12$ et $x = 4,8$ ✓
- **Ordonnée** : $y = -9,6 + 11 = 1,4$ ✓
- **Sommet** : $C(4,8; 1,4)$ ✓
- **Contrôle de C dans la troisième** : $2,4 - 1 = 1,4$ ✓
- **Aire par le déterminant** : $\overrightarrow{AB} = (-9; -9)$ et $\overrightarrow{AC} = (1,8; -3,6)$ ✓

— **Calcul** : $(-9) \times (-3,6) - 1,8 \times (-9) = 32,4 + 16,2 = 48,6 \checkmark$

— **Aire** :

$$A = \frac{48,6}{2} = 24,3$$

— **Contrôle de vraisemblance** : le rectangle englobant mesure $10,8 \times 9 = 97,2 \checkmark$

— **Comparaison** : $24,3 < 97,2 \checkmark$

— **Longueur AB** : $\sqrt{81 + 81} = 9\sqrt{2} \approx 12,728 \checkmark$

— **Hauteur relative** : $\frac{2 \times 24,3}{9\sqrt{2}} = \frac{48,6}{12,728} \approx 3,818 \checkmark$

Réponse. $A(3; 5)$, $B(-6; -4)$, $C(4,8; 1,4)$ et une aire de 24,3.

Correction de l'exercice 13 - Contrainte de budget

— **Inconnues** : c le nombre de cahiers, s celui de stylos, entiers positifs $\checkmark$

— **Contrainte** : $3c + 2s \leq 60 \checkmark$

— **Frontière** : $3c + 2s = 60$, soit $s = 30 - 1,5c \checkmark$

— **Contraintes d'entiers** : $c \geq 0$ et $s \geq 0 \checkmark$

— **Valeur maximale de c** : $3c \leq 60$, donc $c \leq 20 \checkmark$

— **Valeur maximale de s** : $s \leq 30 \checkmark$

— **Achats sur la frontière avec s entier** : il faut $1,5c$ entier, donc c **pair** $\checkmark$

— **Exemples** : $(0; 30)$, $(2; 27)$, $(4; 24)$, ..., $(20; 0) \checkmark$

— **Nombre de tels achats** : 11 $\checkmark$

— **Objectif** : maximiser $N = c + s \checkmark$

— **Sur la frontière** : $N = c + 30 - 1,5c = 30 - 0,5c \checkmark$

— **Observation** : N **décroît** avec $c \checkmark$

— **Maximum** : atteint pour $c = 0 \checkmark$

— **Achat optimal** :

0 cahier et 30 stylos, soit 30 objets

— **Contrôle du budget** : $30 \times 2 = 60 \text{ €} \checkmark$

— **Contrôle d'un autre achat** : $(10; 15)$ donne 25 objets pour $30 + 30 = 60 \text{ €} \checkmark$

— **Cohérence** : $25 < 30 \checkmark$

— **Explication** : les stylos étant moins chers, ils maximisent le nombre d'objets par euro $\checkmark$

— **Contrôle du rapport** : $\frac{1}{2} = 0,5$ objet par euro contre $\frac{1}{3} \approx 0,33 \checkmark$

Réponse. $3c + 2s \leq 60$; le maximum est 30 objets, soit 30 stylos et aucun cahier.

Correction de l'exercice 14 - Distance d'un point à une droite

— **Pente de d** : 2 $\checkmark$

— **Pente de la perpendiculaire** : $-\frac{1}{2} \checkmark$

— **Perpendiculaire par A** : $y = -\frac{1}{2}x + p \checkmark$

— **Passage par A** : $2 = -3 + p$, donc $p = 5 \checkmark$

— **Équation** : $y = -\frac{1}{2}x + 5 \checkmark$

— **Intersection avec d** : $2x - 3 = -\frac{1}{2}x + 5 \checkmark$

— **Résolution** : $\frac{5}{2}x = 8$, donc $x = 3,2$ ✓

— **Ordonnée** : $y = 6,4 - 3 = 3,4$ ✓

— **Projeté orthogonal** :

$$P(3,2; 3,4)$$

— **Contrôle sur la perpendiculaire** : $-1,6 + 5 = 3,4$ ✓

— **Distance** : $AP = \sqrt{(6 - 3,2)^2 + (2 - 3,4)^2}$ ✓

— **Calcul** : $\sqrt{7,84 + 1,96} = \sqrt{9,8} \approx 3,130$ ✓

— **Contrôle de l'orthogonalité** : $\overrightarrow{PA} = (2,8; -1,4)$ ✓

— **Vecteur directeur de d** : $(1; 2)$ ✓

— **Produit** : $2,8 \times 1 + (-1,4) \times 2 = 2,8 - 2,8 = 0$ ✓

— **Contrôle par un autre point de d** : $(4; 5)$ donne $\sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \approx 3,606 > 3,130$ ✓

— **Autre contrôle** : $(2; 1)$ donne $\sqrt{16 + 1} = \sqrt{17} \approx 4,123 > 3,130$ ✓

— **Cohérence** : le projeté est bien le point le plus proche ✓

Réponse. $P(3,2; 3,4)$, à distance $\sqrt{9,8} \approx 3,13$.

Correction de l'exercice 15 - Mélange sous contrainte

— **Inconnues** : x et y les volumes des deux concentrés, en litres ✓

— **Contrainte A** : $2x + y \geq 40$ ✓

— **Contrainte B** : $x + 3y \geq 30$ ✓

— **Positivité** : $x \geq 0$ et $y \geq 0$ ✓

— **Coût à minimiser** : $C = 4x + 3y$ ✓

— **Sommets de la région** : elle est non bornée, ouverte vers le haut et la droite ✓

— **Premier sommet** : intersection de $2x + y = 40$ avec l'axe des ordonnées, soit $(0; 40)$ ✓

— **Contrôle de l'autre contrainte** : $0 + 120 = 120 \geq 30$ ✓

— **Deuxième sommet** : intersection des deux frontières ✓

— **Système** : $2x + y = 40$ et $x + 3y = 30$ ✓

— **Substitution** : $y = 40 - 2x$, donc $x + 120 - 6x = 30$ ✓

— **Résolution** : $-5x = -90$, donc $x = 18$ et $y = 4$ ✓

— **Troisième sommet** : intersection de $x + 3y = 30$ avec l'axe des abscisses, soit $(30; 0)$ ✓

— **Contrôle** : $60 + 0 = 60 \geq 40$ ✓

— **Coût en $(0; 40)$** : 120 € ✓

— **Coût en $(18; 4)$** : $72 + 12 = 84$ € ✓

— **Coût en $(30; 0)$** : 120 € ✓

— **Minimum** :

$$C_{\min} = 84 \text{ € pour } 18 \text{ L de X et } 4 \text{ L de Y}$$

— **Contrôle des contraintes** : $36 + 4 = 40$ unités de A ✓ et $18 + 12 = 30$ de B ✓

— **Saturation** : les deux contraintes sont exactement satisfaites ✓

Réponse. 18 L de X et 4 L de Y, pour un coût minimal de 84 €.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un triangle complet

a) **Côté $[AB]$** : pente $\frac{-3 - 1}{6 + 2} = -\frac{1}{2}$ ✓

— **Équation** : $y = -\frac{1}{2}(x + 2) + 1 = -\frac{1}{2}x$ ✓

— **Remarque** : cette droite passe par l'**origine** ✓

— **Contrôle en B** : -3 ✓

— **Côté [AC]** : pente $\frac{5-1}{4+2} = \frac{2}{3}$ ✓

— **Équation** : $y = \frac{2}{3}(x+2) + 1 = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$ ✓

— **Contrôle en C** : $\frac{8}{3} + \frac{7}{3} = \frac{15}{3} = 5$ ✓

— **Côté [BC]** : pente $\frac{5+3}{4-6} = -4$ ✓

— **Équation** : $y = -4(x-6) - 3 = -4x + 21$ ✓

— **Contrôle en C** : $-16 + 21 = 5$ ✓

b) **Milieu de [BC]** : $A' = \left(\frac{6+4}{2}; \frac{-3+5}{2}\right) = (5; 1)$ ✓

— **Médiane issue de A** : elle passe par $A(-2; 1)$ et $A'(5; 1)$ ✓

— **Observation** : les deux ordonnées valent 1 ✓

— **Équation** :

$$y = 1$$

— **Centre de gravité** : $G\left(\frac{-2+6+4}{3}; \frac{1-3+5}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}; 1\right)$ ✓

— **Contrôle** : G est bien sur la médiane $y = 1$ ✓

— **Contrôle de la position** : $\overrightarrow{AG} = \left(\frac{14}{3}; 0\right)$ et $\overrightarrow{AA'} = (7; 0)$ ✓

— **Rapport** : $\frac{14/3}{7} = \frac{2}{3}$ ✓

c) **Hauteur issue de C** : perpendiculaire à $[AB]$ ✓

— **Pente de [AB]** : $-\frac{1}{2}$ ✓

— **Pente de la hauteur** : 2 ✓

— **Équation** : $y = 2(x-4) + 5 = 2x - 3$ ✓

— **Contrôle en C** : $8 - 3 = 5$ ✓

— **Pied de la hauteur** : intersection avec $y = -\frac{1}{2}x$ ✓

— **Équation** : $2x - 3 = -\frac{1}{2}x$ ✓

— **Résolution** : $\frac{5}{2}x = 3$, donc $x = 1,2$ ✓

— **Ordonnée** : $y = -0,6$ ✓

— **Pied** :

$$K(1,2; -0,6)$$

— **Contrôle sur la hauteur** : $2,4 - 3 = -0,6$ ✓

— **Longueur de la hauteur** :

$$CK = \sqrt{(4-1,2)^2 + (5+0,6)^2} = \sqrt{7,84 + 31,36} = \sqrt{39,2} \approx 6,261 \text{ ✓}$$

d) **Première méthode — le déterminant** ✓

— **Vecteurs** : $\overrightarrow{AB} = (8; -4)$ et $\overrightarrow{AC} = (6; 4)$ ✓

— **Déterminant** : $8 \times 4 - 6 \times (-4) = 32 + 24 = 56$ ✓

— **Aire** :

$$A = \frac{56}{2} = 28$$

— **Seconde méthode — base et hauteur** ✓

- **Base** AB : $\sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \approx 8,944$ ✓
- **Hauteur** : $CK = \sqrt{39,2} \approx 6,261$ ✓
- **Aire** : $\frac{8,944 \times 6,261}{2} \approx 28,0$ ✓
- **Cohérence** : les deux méthodes concordent ✓
- **Contrôle exact** : $\sqrt{80} \times \sqrt{39,2} = \sqrt{3136} = 56$ ✓
- **Longueur** BC : $\sqrt{4 + 64} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \approx 8,246$ ✓
- **Longueur** AC : $\sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \approx 7,211$ ✓
- **Périmètre** : $\approx 8,944 + 8,246 + 7,211 = 24,402$ ✓
- **Nature du triangle** : les trois côtés diffèrent, et $80 \neq 68 + 52$, donc **quelconque** ✓

Réponse. a) $y = -\frac{1}{2}x$, $y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$, $y = -4x + 21$ · b) médiane $y = 1$ et $G\left(\frac{8}{3}; 1\right)$ · c) hauteur $y = 2x - 3$, pied $K(1,2; -0,6)$ · d) aire 28.