Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : configurations et optimisation

Droites du plan — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les droites remarquables d'un triangle.

Droite	Définition	Comment l'obtenir
médiane	relie un sommet au milieu du côté opposé	deux points
médiatrice	points équidistants de deux sommets	$MA^2 = MB^2$
hauteur	du sommet, perpendiculaire au côté opposé	côté horizontal ou vertical

Points de concours.

Droites	Point de concours
les trois médianes	centre de gravité G
les trois médiatrices	centre du cercle circonscrit Ω

Régionnement du plan. Une droite $ax + by + c = 0$ partage le plan en deux **demi-plans**. Pour savoir lequel correspond à $ax + by + c > 0$, on **teste un point** simple (souvent l'origine) et on regarde le signe obtenu.

Plusieurs inéquations à la fois. L'ensemble des points qui les vérifient toutes est l'**intersection** des demi-plans : un polygone convexe, éventuellement non borné. Ses **sommets** sont les intersections des droites frontières prises deux à deux.

Comparer des choix sous contraintes. On vérifie d'abord qu'un choix respecte **toutes** les contraintes (il est alors « réalisable »), puis on calcule la quantité à comparer (coût, bénéfice) pour chacun des choix réalisables proposés.

réalisable $\Leftrightarrow$ toutes les inéquations sont vérifiées

Deux réflexes de rédaction.

— Écrire les équations de **toutes** les droites en jeu avant de résoudre.

— Vérifier chaque sommet trouvé dans **toutes** les contraintes, pas seulement dans les deux qui l'ont produit.

Correction de l'exercice 1 – Les médianes d'un triangle

La médiane issue de A joint A au milieu de $[BC]$, $A'(4\,;2)$. Elle passe par l'origine avec le coefficient directeur $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$: $y = \frac{1}{2}x$.

La médiane issue de B joint B au milieu de $[AC]$, $B'(1\,;2)$. Son coefficient directeur vaut $\frac{2-0}{1-6} = -\frac{2}{5}$, et elle passe par B : $0 = -\frac{2}{5} \times 6 + p$, donc $p = \frac{12}{5}$, soit $y = -\frac{2}{5}x + \frac{12}{5}$. On résout :

$$\frac{1}{2}x = -\frac{2}{5}x + \frac{12}{5} \Leftrightarrow \frac{9}{10}x = \frac{12}{5} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$$

puis $y = \frac{4}{3}$. C'est le centre de gravité : $\left(\frac{0+6+2}{3}\,;\frac{0+0+4}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\,;\frac{4}{3}\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $y = \frac{1}{2}x$ et $y = -\frac{2}{5}x + \frac{12}{5}$; elles se coupent au centre de gravité $G\left(\frac{8}{3}\,;\frac{4}{3}\right)$.

Correction de l'exercice 2 – Centre du cercle circonscrit

Le centre du cercle circonscrit est équidistant des trois sommets : il est sur les médiatrices. Le segment $[AB]$ est horizontal, de milieu $(3\,;0)$: sa médiatrice est la droite verticale $x = 3$.

Pour la médiatrice de $[AC]$, on écrit $MA^2 = MC^2$ avec $M(x\,;y)$:

$$x^2 + y^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2 \Leftrightarrow 0 = -4x + 4 - 8y + 16 \Leftrightarrow x + 2y = 5$$

Avec $x = 3$, on obtient $2y = 2$, soit $y = 1$: le centre est $\Omega(3\,;1)$.

Le rayon vaut $\Omega A = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$. **Contrôle** : $\Omega B = \sqrt{9+1}$ et $\Omega C = \sqrt{1+9}$, les trois distances sont égales.

Réponse. $\Omega(3\,;1)$, de rayon $\sqrt{10} \approx 3{,}16$.

Correction de l'exercice 3 – Régionnement du plan

La frontière est la droite $2x - 3y + 6 = 0$, soit $y = \frac{2}{3}x + 2$. On isole y dans l'inéquation, en divisant par -3, ce qui change le sens :

$$2x - 3y + 6 > 0 \Leftrightarrow -3y > -2x - 6 \Leftrightarrow y < \frac{2}{3}x + 2$$

L'ensemble est le **demi-plan situé sous la droite**, frontière exclue (inégalité stricte).

Contrôle : l'origine donne $6 > 0$, vrai, et elle est bien sous la droite ; le point $(0\,;5)$ donne $-9 < 0$, il est au-dessus et n'appartient pas à l'ensemble. Le point $(3\,;4)$ donne 0 : il est sur la frontière, donc exclu.

Réponse. Le demi-plan ouvert sous la droite $y = \frac{2}{3}x + 2$, c'est-à-dire $y < \frac{2}{3}x + 2$.

Correction de l'exercice 4 – Deux inéquations à la fois

Chaque inéquation décrit un demi-plan. $y \leq -x + 8$: les points sous la droite $y = -x + 8$ ou sur elle. $y \geq 2x - 4$: les points au-dessus de la droite $y = 2x - 4$ ou sur elle. L'ensemble cherché est leur intersection.

Les deux frontières se coupent quand $-x + 8 = 2x - 4$, soit $x = 4$ et $y = 4$: le sommet de la région est $S(4\,;4)$.

$$-x + 8 = 2x - 4 \Leftrightarrow x = 4$$

La région est un secteur angulaire non borné, ouvert vers la gauche. **Contrôle** : l'origine vérifie $0 \leq 8$ et $0 \geq -4$, elle en fait partie ; $(10\,;0)$ n'en fait pas partie ($0 \leq -2$ est faux). En $x = 0$, la région va de $y = -4$ à $y = 8$.

Réponse. Un secteur angulaire non borné de sommet $S(4\,;4)$, ouvert vers la gauche.

Correction de l'exercice 5 – Polygone des contraintes

Les deux premières contraintes placent la région dans le quart de plan $x \geq 0$, $y \geq 0$. Les sommets sont des intersections de frontières qui respectent toutes les contraintes.

— L'origine $(0\,;0)$.
— Sur l'axe des abscisses ($y = 0$), la contrainte $2x + y \leq 14$ est la plus forte : $(7\,;0)$ (le point $(10\,;0)$ donnerait $20 > 14$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— L'intersection de $x + y = 10$ et $2x + y = 14$, soit $y = 10 - x$ et $y = 14 - 2x$: $10 - x = 14 - 2x$ donne $x = 4$, puis $y = 6$.
— Sur l'axe des ordonnées, $x + y \leq 10$ est la plus forte : $(0\,;10)$.

$$(0\,;0),\ (7\,;0),\ (4\,;6),\ (0\,;10)$$

Contrôle : $(4\,;6)$ vérifie $4 + 6 = 10$ et $8 + 6 = 14$.

Réponse. $(0\,;0)$, $(7\,;0)$, $(4\,;6)$ et $(0\,;10)$.

Correction de l'exercice 6 – Aire du polygone des contraintes

On découpe le polygone par la diagonale $[OQ]$ en deux triangles dont un côté est porté par un axe.

— Le triangle OPQ a pour base $OP = 7$, sur l'axe des abscisses, et pour hauteur l'ordonnée de Q, soit 6 : aire $\dfrac{7 \times 6}{2} = 21$.
— Le triangle OQR a pour base $OR = 10$, sur l'axe des ordonnées, et pour hauteur l'abscisse de Q, soit 4 : aire $\dfrac{10 \times 4}{2} = 20$.

$$A = 21 + 20 = 41$$

Contrôle par le rectangle englobant de 7 sur 10 (aire 70). La partie située hors du polygone se découpe en un triangle rectangle de sommets P, $(7\,;6)$, Q (aire $\dfrac{6 \times 3}{2} = 9$), un rectangle de 3 sur 4 au-dessus (aire 12) et un triangle rectangle de sommets Q, $(4\,;10)$, R (aire $\dfrac{4 \times 4}{2} = 8$) : $70 - 9 - 12 - 8 = 41$.

Réponse. $A = 21 + 20 = 41$.

Correction de l'exercice 7 – Plans de production

a) Le temps de travail vaut $3t + c$ heures, le nombre de meubles $t + c$:

$$3t + c \leq 30 \qquad t + c \leq 20 \qquad t \geq 0 \qquad c \geq 0$$

b) Pour $(8\,;10)$: $24 + 10 = 34 > 30$, le temps manque, le plan n'est pas réalisable. Pour $(5\,;15)$: $15 + 15 = 30$ et $5 + 15 = 20$, les deux contraintes sont respectées (et même atteintes).

c) Le bénéfice vaut $60t + 25c$: 600 € pour $(10\,;0)$, $300 + 375 = 675$ € pour $(5\,;15)$, 500 € pour $(0\,;20)$. Le plan $(5\,;15)$, qui utilise toutes les heures et produit le nombre maximal de meubles, est le meilleur des trois.

Réponse. a) $3t + c \leq 30$, $t + c \leq 20$, $t \geq 0$, $c \geq 0$ · b) $(8\,;10)$ non, $(5\,;15)$ oui · c) 600 €, 675 € et 500 € : le plan $(5\,;15)$ est le meilleur des trois.

Correction de l'exercice 8 – Centre de gravité et cercle circonscrit

Le centre de gravité a pour coordonnées les moyennes de celles des sommets : $G\left(\dfrac{0+8+0}{3}\,;\dfrac{0+0+6}{3}\right) = \left(\dfrac{8}{3}\,;2\right)$.

Le triangle est rectangle en A, ses côtés $[AB]$ et $[AC]$ étant sur les axes. Le centre de son cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse : $\Omega(4\,;3)$, et le rayon vaut $\dfrac{BC}{2} = 5$.

On teste l'alignement avec les vecteurs $\overrightarrow{AG}\left(\dfrac{8}{3}\,;2\right)$ et $\overrightarrow{A\Omega}(4\,;3)$:

$$\det = \frac{8}{3} \times 3 - 4 \times 2 = 8 - 8 = 0$$

Ils sont colinéaires : les trois points sont alignés, sur la droite $y = \dfrac{3}{4}x$; on a même

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$\overrightarrow{A\Omega} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$.

Réponse. $G\left(\frac{8}{3}\,;2\right)$ et $\Omega(4\,;3)$, alignés avec A sur la droite $y = \frac{3}{4}x$.

Correction de l'exercice 9 – Un carré dans le repère

a) $\overrightarrow{AB}(2\,;4)$ et $\overrightarrow{DC}(-2+4\,;7-3) = (2\,;4)$ sont égaux : $ABCD$ est un parallélogramme. Puis $AB = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$ et $AD = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$: c'est un losange. Enfin, avec $BD^2 = 36 + 4 = 40$,

$$AB^2 + AD^2 = 20 + 20 = 40 = BD^2$$

l'angle en A est droit (réciproque de Pythagore) : $ABCD$ est un **carré**, de côté $2\sqrt{5}$.

b) (AB) a pour coefficient directeur $\frac{4}{2} = 2$ et passe par $A(0\,;1)$: $y = 2x + 1$. (DC) est parallèle, de même coefficient 2, et passe par $D(-4\,;3)$: $3 = -8 + p$, donc $p = 11$ et $y = 2x + 11$.

Réponse. a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (2\,;4)$, côtés égaux et angle droit en A · b) (AB):$y = 2x + 1$ et (DC):$y = 2x + 11$.

Correction de l'exercice 10 – Symétrique d'une droite

Une symétrie transforme une droite en une droite : il suffit de transformer deux points, ou de remplacer les coordonnées dans l'équation.

Par la symétrie d'axe l'axe des ordonnées, $(x\,;y)$ devient $(-x\,;y)$. Un point $(x\,;y)$ est sur l'image si $(-x\,;y)$ est sur la droite de départ, c'est-à-dire si $y = 3(-x) - 2$:

$$y = -3x - 2$$

Par la symétrie de centre O, $(x\,;y)$ devient $(-x\,;-y)$: on écrit $-y = 3(-x) - 2$, soit $y = 3x + 2$.

Contrôle : le point $(1\,;1)$ de la droite a pour images $(-1\,;1)$, qui vérifie $3 - 2 = 1$, et $(-1\,;-1)$, qui vérifie $-3 + 2 = -1$. La symétrie centrale donne une droite parallèle.

Réponse. Par l'axe (Oy) : $y = -3x - 2$ · par le centre O : $y = 3x + 2$.

Correction de l'exercice 11 – Droites passant par un point fixe

a) On factorise par m : $y = m(x-2) + 3$. Pour $x = 2$, le terme $m(x-2)$ est nul **quel que soit** m, et $y = 3$. Toutes les droites d_m passent donc par $P(2\,;3)$.

b) d_m passe par $A(5\,;9)$ si $9 = 5m - 2m + 3$, soit $3m = 6$ et $m = 2$: c'est la droite $y = 2x - 1$. **Contrôle** : $2 \times 5 - 1 = 9$ ✓ et $2 \times 2 - 1 = 3$ ✓.

d_m est parallèle à $y = -x + 1$ si elle a le même coefficient directeur, $m = -1$: c'est la droite $y = -x + 5$, qui passe bien par P ($-2 + 5 = 3$) et n'est pas confondue avec $y = -x + 1$.

c) Non : chaque d_m a un coefficient directeur m, alors qu'une droite verticale n'en a pas. La droite $x = 2$ passe par P mais n'est d'aucune des formes $y = mx - 2m + 3$. Les droites d_m sont **toutes** les droites passant par P, sauf la verticale.

Réponse. a) $P(2\,;3)$ · b) $y = 2x - 1$ ($m = 2$) et $y = -x + 5$ ($m = -1$) · c) non, la droite $x = 2$ n'a pas de coefficient directeur.

Correction de l'exercice 12 – Trois droites formant un triangle

Chaque sommet est l'intersection de deux des droites.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $x+2=-2x+11$ donne $x=3$: $A(3\,;5)$.
— $x+2=\frac{1}{2}x-1$ donne $\frac{1}{2}x=-3$, soit $x=-6$: $B(-6\,;-4)$.
— $-2x+11=\frac{1}{2}x-1$ donne $\frac{5}{2}x=12$, soit $x=4{,}8$: $C(4{,}8\,;1{,}4)$.

Pour l'aire, on inscrit le triangle dans le rectangle de $x=-6$ à $x=4{,}8$ et de $y=-4$ à $y=5$: $10{,}8\times 9=97{,}2$. On retire trois triangles rectangles, d'aires $\frac{9\times 9}{2}=40{,}5$ (côté $[AB]$), $\frac{1{,}8\times 3{,}6}{2}=3{,}24$ (côté $[AC]$) et $\frac{10{,}8\times 5{,}4}{2}=29{,}16$ (côté $[BC]$) :

$$A=97{,}2-40{,}5-3{,}24-29{,}16=24{,}3$$

Réponse. $A(3\,;5)$, $B(-6\,;-4)$, $C(4{,}8\,;1{,}4)$ et une aire de 24,3.

Correction de l'exercice 13 – Contrainte de budget

On note c le nombre de cahiers et s le nombre de stylos, entiers positifs. Le budget impose

$$3c+2s\leq 60$$

Il y a donc au plus 20 cahiers ($3c\leq 60$) et au plus 30 stylos.

Pour avoir le plus d'objets possible, on dépense tout le budget, puis on compare : sur la frontière, $s=30-1{,}5c$, donc le nombre d'objets vaut $c+s=30-0{,}5c$. Il diminue quand c augmente : le maximum est atteint pour $c=0$, avec 30 stylos. **Contrôle** : $(10\,;15)$ coûte aussi 60 € mais ne donne que 25 objets. Les stylos rapportent plus d'objets par euro ($\frac{1}{2}$ contre $\frac{1}{3}$).

Réponse. $3c+2s\leq 60$; le maximum est 30 objets, soit 30 stylos et aucun cahier.

Correction de l'exercice 14 – Point le plus proche sur une droite

a) $AM^2=(t-6)^2+(2t-3-2)^2=t^2-12t+36+4t^2-20t+25=5t^2-32t+61$.

b) En développant, $5(t-3{,}2)^2+9{,}8=5t^2-32t+51{,}2+9{,}8=5t^2-32t+61$. Un carré étant positif ou nul,

$$AM^2=5(t-3{,}2)^2+9{,}8\geq 9{,}8$$

avec égalité pour $t=3{,}2$. Le point le plus proche est $P(3{,}2\,;3{,}4)$, et la distance minimale vaut $\sqrt{9{,}8}\approx 3{,}13$.

Contrôle : le point $(4\,;5)$ de d est à $\sqrt{13}\approx 3{,}61$ de A, le point $(2\,;1)$ à $\sqrt{17}\approx 4{,}12$, plus loin tous les deux.

Réponse. a) en développant · b) $P(3{,}2\,;3{,}4)$, à la distance $\sqrt{9{,}8}\approx 3{,}13$.

Correction de l'exercice 15 – Mélanges sous contraintes

a) La vitamine A apportée vaut $2x+y$ unités, la vitamine B $x+3y$:

$$2x+y\geq 40 \qquad x+3y\geq 30 \qquad x\geq 0 \qquad y\geq 0$$

b) $(18\,;4)$: $36+4=40$ et $18+12=30$, les deux contraintes sont respectées (de justesse). $(10\,;10)$: $20+10=30<40$, pas assez de vitamine A. $(0\,;40)$: 40 et 120, respectées.

c) Le coût vaut $4x+3y$: $72+12=84$ € pour $(18\,;4)$ et 120 € pour $(0\,;40)$. Le mélange $(18\,;4)$ est le moins cher des deux ; il apporte exactement les quantités minimales.

Réponse. a) $2x+y\geq 40$ et $x+3y\geq 30$ · b) $(18\,;4)$ et $(0\,;40)$ oui, $(10\,;10)$ non · c) 84 € et 120 € : $(18\,;4)$ est le moins cher.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : un triangle complet

a) (AB) : coefficient $\dfrac{-3-1}{6+2} = -\dfrac{1}{2}$, et $y = -\dfrac{1}{2}x$ (elle passe par l’origine). (AC) : coefficient $\dfrac{5-1}{4+2} = \dfrac{2}{3}$, d’où $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{3}$. (BC) : coefficient $\dfrac{5+3}{4-6} = -4$, d’où $y = -4x + 21$.

b) Le milieu de $[BC]$ est $A'(5\,;1)$; A et A' ont la même ordonnée, la médiane est la droite $y = 1$. Le centre de gravité est $G\left(\dfrac{-2+6+4}{3}\,;\dfrac{1-3+5}{3}\right) = \left(\dfrac{8}{3}\,;1\right)$, bien sur cette médiane.

c) Le rectangle va de $x=-2$ à $x=6$ et de $y=-3$ à $y=5$, d’aire 64. On retire trois triangles rectangles, d’aires 16 (côté $[AB]$), 8 (côté $[BC]$) et 12 (côté $[AC]$) :

$$A = 64 - 16 - 8 - 12 = 28$$

d) La base $[AB]$ mesure $\sqrt{64+16} = 4\sqrt{5}$. De $A = \dfrac{AB \times h}{2}$, on tire $h = \dfrac{2 \times 28}{4\sqrt{5}} = \dfrac{14}{\sqrt{5}} \approx 6{,}26$.

Réponse. a) $y = -\frac{1}{2}x$, $y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$, $y = -4x + 21$ · b) médiane $y = 1$ et $G\left(\frac{8}{3}\,;1\right)$ · c) aire 28 · d) $h = \dfrac{14}{\sqrt{5}} \approx 6{,}26$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).