Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : configurations et optimisation

Droites du plan — Seconde

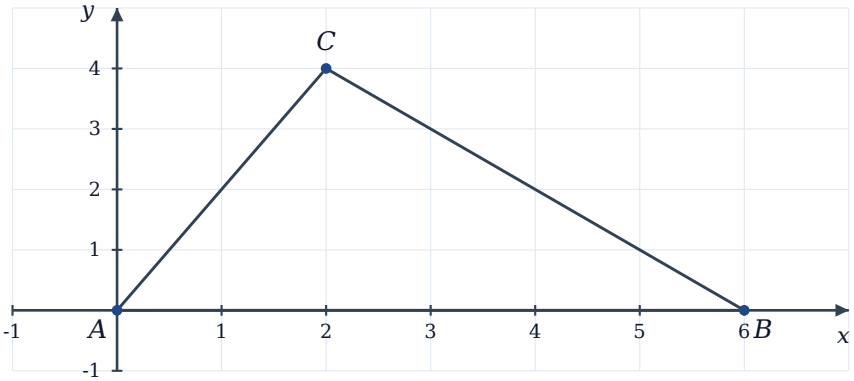
Exercices

Méthode

Des problèmes complets mêlant droites, inéquations et géométrie : médianes et médiatrices d'un triangle, demi-plans définis par des inéquations, contraintes et modélisation économique. Chaque énoncé demande de **choisir** entre équation réduite, cartésienne ou vectorielle.

Exercice 1 – Les médianes d'un triangle

Soit $A(0\,;0)$, $B(6\,;0)$ et $C(2\,;4)$. Déterminer les équations des médianes issues de A et de B, puis leur point d'intersection. Le reconnaître.



Le triangle ABC

Exercice 2 – Centre du cercle circonscrit

Avec le même triangle $A(0\,;0)$, $B(6\,;0)$, $C(2\,;4)$, déterminer le centre du cercle circonscrit par les médiatrices.

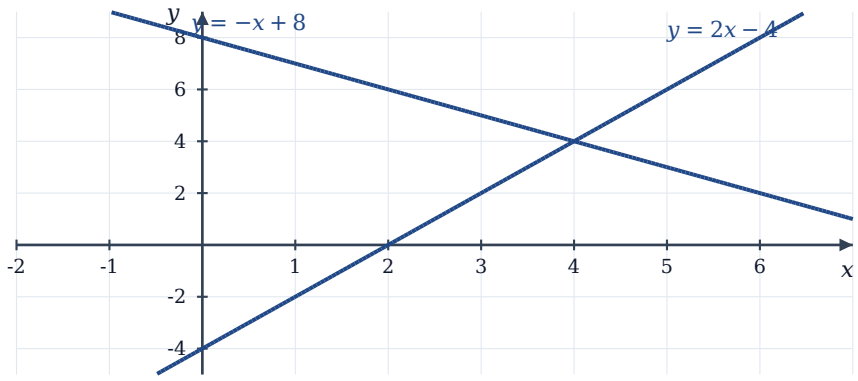
Exercice 3 – Régionnement du plan

Déterminer et décrire l'ensemble des points vérifiant $2x - 3y + 6 > 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Deux inéquations à la fois

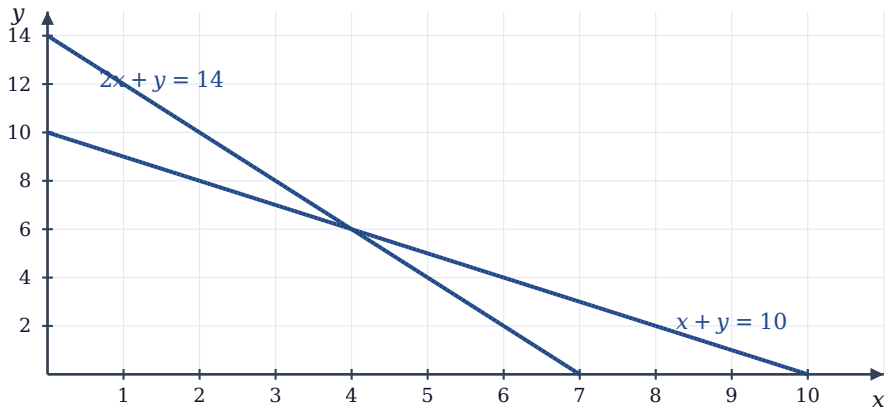
Décrire l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient à la fois $y \leq -x + 8$ et $y \geq 2x - 4$, et déterminer le sommet de cette région.



Les deux droites frontières

Exercice 5 – Polygone des contraintes

Déterminer les sommets du polygone défini par $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 10$ et $2x + y \leq 14$.



Les droites frontières des deux contraintes

Exercice 6 – Aire du polygone des contraintes

Calculer l'aire du polygone de sommets $O(0\,;0)$, $P(7\,;0)$, $Q(4\,;6)$ et $R(0\,;10)$ obtenu à l'exercice précédent.

Exercice 7 – Plans de production

Un atelier fabrique des tables (3 h de travail, 60 € de bénéfice) et des chaises (1 h de travail, 25 € de bénéfice). Il dispose de 30 h et ne peut produire plus de 20 meubles. On note t le nombre de tables et c le nombre de chaises.

a) Traduire les contraintes par des inéquations.

b) Les plans $(t\,;c) = (8\,;10)$ et $(5\,;15)$ sont-ils réalisables ?

c) Comparer le bénéfice des plans $(10\,;0)$, $(5\,;15)$ et $(0\,;20)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Centre de gravité et cercle circonscrit

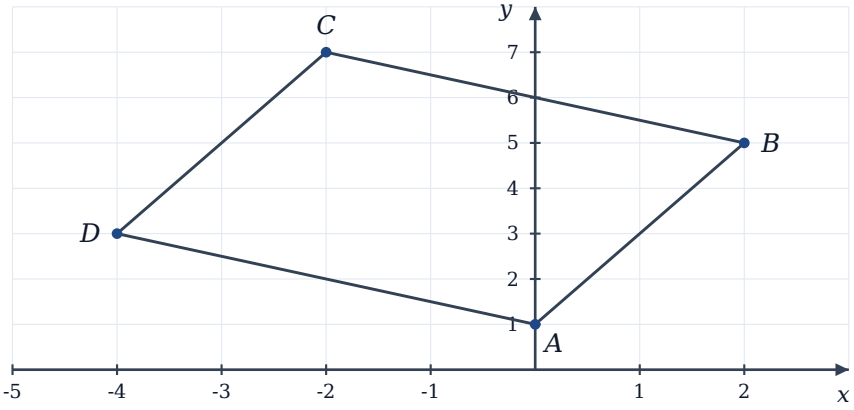
Soit $A(0\,;0)$, $B(8\,;0)$ et $C(0\,;6)$. Déterminer le centre de gravité G du triangle ABC et le centre Ω de son cercle circonscrit, puis montrer que A, G et Ω sont alignés.

Exercice 9 – Un carré dans le repère

Soit $A(0\,;1)$, $B(2\,;5)$, $C(-2\,;7)$ et $D(-4\,;3)$.

a) Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme, puis que c'est un carré.

b) Déterminer les équations réduites des droites (AB) et (DC).



Le quadrilatère ABCD

Exercice 10 – Symétrique d'une droite

Déterminer l'image de la droite $y = 3x - 2$ par la symétrie d'axe (Oy), puis par la symétrie de centre O.

Exercice 11 – Droites passant par un point fixe

Pour tout réel m, on note d_m la droite d'équation $y = mx - 2m + 3$.

a) Montrer que toutes les droites d_m passent par un même point P.

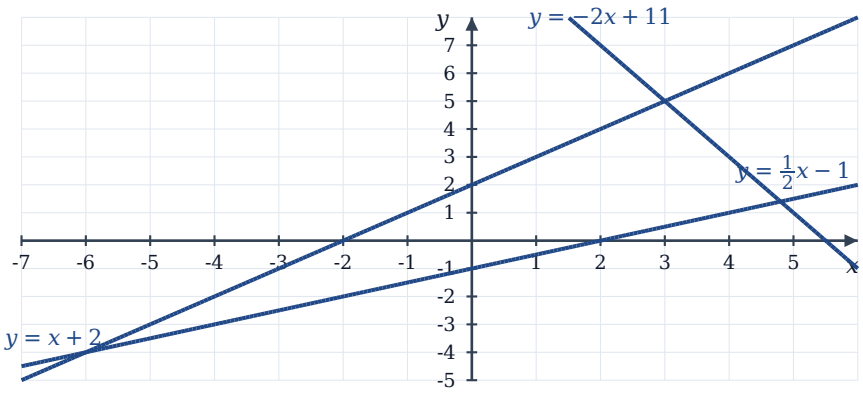
b) Déterminer la droite d_m qui passe par $A(5\,;9)$, puis celle qui est parallèle à la droite $y = -x + 1$.

c) La droite verticale passant par P est-elle l'une des droites d_m ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – Trois droites formant un triangle

Les droites $y = x + 2$, $y = -2x + 11$ et $y = \frac{1}{2}x - 1$ forment un triangle. Déterminer ses sommets et son aire.



Les trois droites

Exercice 13 – Contrainte de budget

Avec 60 € on achète des cahiers à 3 € et des stylos à 2 €. Décrire toutes les possibilités d'achat, puis celle qui maximise le nombre total d'objets.

Exercice 14 – Point le plus proche sur une droite

Soit $A(6\,;2)$ et la droite d : $y = 2x - 3$. Pour tout réel t, on note $M(t\,;2t-3)$ le point de d d'abscisse t.

a) Montrer que $AM^2 = 5t^2 - 32t + 61$.

b) Vérifier que $5t^2 - 32t + 61 = 5(t - 3{,}2)^2 + 9{,}8$, puis en déduire le point de d le plus proche de A et la distance correspondante.

Exercice 15 – Mélanges sous contraintes

Un jus doit contenir au moins 40 unités de vitamine A et au moins 30 unités de vitamine B. Le concentré X apporte 2 unités de A et 1 de B par litre, et coûte 4 €/L ; le concentré Y apporte 1 unité de A et 3 de B par litre, et coûte 3 €/L. On note x et y les volumes de X et de Y, en litres.

a) Traduire les contraintes par des inéquations.

b) Les mélanges $(18\,;4)$, $(10\,;10)$ et $(0\,;40)$ respectent-ils les contraintes ?

c) Calculer le coût de ceux qui les respectent et dire lequel est le moins cher.

Exercice 16 – Synthèse : un triangle complet

Soit $A(-2\,;1)$, $B(6\,;-3)$ et $C(4\,;5)$.

a) Déterminer les équations des trois côtés.

b) Déterminer l'équation de la médiane issue de A et le centre de gravité G.

c) Calculer l'aire du triangle en l'inscrivant dans un rectangle aux côtés parallèles aux axes.

d) En déduire la hauteur issue de C, c'est-à-dire la distance de C à la droite (AB).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).