MATHÉMATIQUES

Droites du plan

Seconde

Vecteur directeur • Équation cartésienne • Équation réduite
Pente • Ordonnée à l'origine • Alignement • Parallélisme • Intersection

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de mathématiques de seconde générale et technologique** (arrêté du 26 février 2026, BO n°14 du 2 avril 2026, rentrée 2026), partie « Géométrie », section « Droites du plan ». Il couvre :

- vecteur directeur d'une droite ; équation cartésienne, équation réduite ;
- pente (ou coefficient directeur) d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées ;
- déterminer une équation à partir de deux points, d'un point et d'un vecteur directeur, ou d'un point et de la pente ; tracer une droite ;
- établir que trois points sont alignés ou non ; reconnaître des droites parallèles ou sécantes ;
- point d'intersection de deux droites sécantes données par leur équation réduite ;
- **démonstration** au programme : en utilisant le déterminant, établir la forme générale d'une équation de droite.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Objectif : déterminer et utiliser une équation de droite, reconnaître des droites parallèles ou sécantes et calculer leur point d'intersection.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Vecteur directeur d'une droite 3

2 Équation cartésienne d'une droite 3

3 Équation réduite, pente et ordonnée à l'origine 4

4 Déterminer une équation de droite 5

5 Alignement de trois points 6

6 Positions relatives de deux droites 6

7 Erreurs classiques 8

8 Fiche de synthèse 8

9 Exercices d'application 8

10 Corrigés des exercices 9

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Vecteur directeur d'une droite

Vecteur directeur

Soit A et B deux points distincts d'une droite d. Tout vecteur non nul **colinéaire** à $\overrightarrow{AB}$ est appelé **vecteur directeur** de d.

Une direction, pas une position

Une droite a une infinité de vecteurs directeurs : si $\vec{u}$ en est un, $k\vec{u}$ en est un aussi pour tout réel $k \neq 0$. Un vecteur directeur ne dit pas **où** passe la droite : pour la déterminer, il faut aussi connaître un de ses points.

Appartenance à une droite

Soit d la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Un point M appartient à d si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire

$$\det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}\right) = 0.$$

On rappelle que, pour $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$.

Tester un point

d passe par $A(1\,;2)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(3\,;-1)$.

- $B(7\,;0)$: $\overrightarrow{AB}(6\,;-2)$ et $\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}) = 6 \times (-1) - (-2) \times 3 = -6 + 6 = 0$: $B \in d$.
- $C(4\,;2)$: $\overrightarrow{AC}(3\,;0)$ et $\det(\overrightarrow{AC}, \vec{u}) = 3 \times (-1) - 0 \times 3 = -3 \neq 0$: $C \notin d$.

2. Équation cartésienne d'une droite

Forme générale d'une équation de droite

1. Toute droite d admet une équation de la forme

$$ax + by + c = 0 \qquad \text{avec } (a\,;b) \neq (0\,;0),$$

appelée **équation cartésienne** de d : un point $M(x\,;y)$ appartient à d si et seulement si ses coordonnées vérifient cette égalité.

2. Réciproquement, pour tous réels a, b, c avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$, l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $ax + by + c = 0$ est une droite, de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Démonstration au programme. **1.** Soit d la droite passant par $A(x_A\,;y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha\,;\beta)$, non nul. Pour $M(x\,;y)$, on a $\overrightarrow{AM}(x - x_A\,;y - y_A)$ et

$$M \in d \iff \det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}\right) = 0 \iff (x - x_A)\beta - (y - y_A)\alpha = 0 \iff \beta x - \alpha y + (\alpha y_A - \beta x_A) = 0.$$

On pose $a = \beta$, $b = -\alpha$ et $c = \alpha y_A - \beta x_A$: c'est une équation $ax + by + c = 0$, et $(a\,;b) = (\beta\,;-\alpha) \neq (0\,;0)$ puisque $\vec{u} \neq \vec{0}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Si $b \neq 0$, le point $A\left(0\,;-\frac{c}{b}\right)$ vérifie l'équation ; si $b = 0$, alors $a \neq 0$ et $A\left(-\frac{c}{a}\,;0\right)$ la vérifie. Dans les deux cas $ax_A + by_A + c = 0$, et en soustrayant cette égalité :

$$ax + by + c = 0 \iff a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \iff \det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}\right) = 0 \quad \text{avec } \vec{u}(-b\,;a),$$

car $\det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}\right) = (x - x_A)a - (y - y_A)(-b)$. L'ensemble est donc la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}(-b\,;a)$, non nul.

Équation cartésienne avec un point et un vecteur directeur

On écrit $\det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}\right) = 0$ avec $M(x\,;y)$, on développe et on réduit. On contrôle avec les coordonnées de A.

Droite passant par $A(1\,;2)$ de vecteur directeur $\vec{u}(3\,;-1)$

$\overrightarrow{AM}(x-1\,;y-2)$, donc

$$\det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}\right) = (x-1) \times (-1) - (y-2) \times 3 = -x - 3y + 7.$$

Une équation cartésienne est $-x - 3y + 7 = 0$, ou encore $x + 3y - 7 = 0$ en multipliant par -1. Contrôle : $1 + 6 - 7 = 0$ pour A, et $7 + 0 - 7 = 0$ pour $B(7\,;0)$, trouvé sur d plus haut.

Une droite, une infinité d'équations cartésiennes

Si $ax+by+c=0$ est une équation cartésienne de d, alors pour tout réel $k \neq 0$, $kax+kby+kc=0$ en est une aussi. On choisit en général des coefficients entiers et simples.

Lire un vecteur directeur

La droite $2x-3y+5=0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(3\,;2)$ (on prend $-b=3$ et $a=2$). La droite $x=4$, soit $1x+0y-4=0$, a pour vecteur directeur $(0\,;1)$: elle est verticale.

L'ordre et le signe

Pour $ax+by+c=0$, le vecteur directeur est $(-b\,;a)$, et non $(a\,;b)$. Avec $2x-3y+5=0$: $(3\,;2)$ est directeur, $(2\,;-3)$ ne l'est pas. Contrôle : en partant d'un point de la droite et en ajoutant le vecteur, on doit retomber sur la droite.

3. Équation réduite, pente et ordonnée à l'origine

Équation réduite

— Toute droite **non parallèle à l'axe des ordonnées** a une unique équation de la forme

$$y = mx + p,$$

appelée **équation réduite**. Le réel m est la **pente** (ou **coefficient directeur**) et p l'**ordonnée à l'origine** : la droite passe par $(0\,;p)$.

— Toute droite **parallèle à l'axe des ordonnées** a une équation de la forme $x = c$: elle n'a pas de pente.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Démonstration. Si $b \neq 0$ dans $ax+by+c=0$, on isole y : $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$, de la forme $y = mx+p$. Si $b = 0$, alors $a \neq 0$ et l'équation s'écrit $x = -\dfrac{c}{a}$. L'unicité vient de ce que p est l'ordonnée du point d'abscisse 0, et m la différence des ordonnées des points d'abscisses 1 et 0.

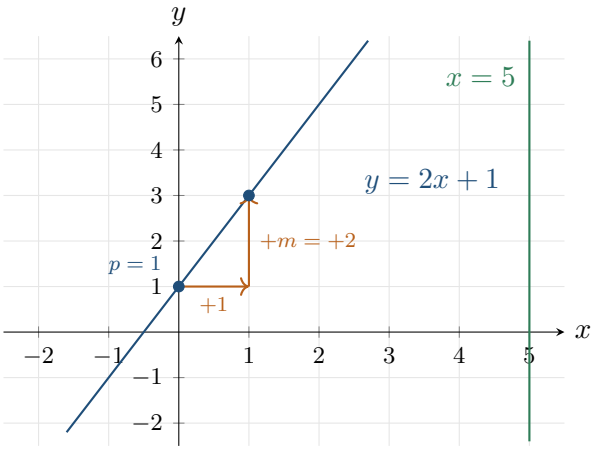
Pente et vecteur directeur

— La droite $y = mx+p$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(1\,;m)$: quand on avance de 1 en abscisse, on monte de m.

— Si $\vec{u}(\alpha\,;\beta)$ dirige une droite avec $\alpha \neq 0$, sa pente vaut $m = \dfrac{\beta}{\alpha}$.

— Si $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ sont deux points de la droite avec $x_A \neq x_B$:

$$\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$



La droite $y = 2x+1$: ordonnée à l'origine 1, pente 2. La droite $x = 5$ est verticale, sans pente.

Passer d'une forme à l'autre

— $2x - 3y + 5 = 0 \iff 3y = 2x + 5 \iff y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{3}$: pente $\dfrac{2}{3}$, ordonnée à l'origine $\dfrac{5}{3}$.

— $y = -\dfrac{1}{2}x + 4 \iff 2y = -x + 8 \iff x + 2y - 8 = 0$.

4. Déterminer une équation de droite

Selon les données

— **Deux points A et B** : si $x_A = x_B$, la droite est verticale, d'équation $x = x_A$. Sinon, on calcule la pente m, puis p en écrivant que A est sur la droite : $y_A = mx_A + p$. On contrôle avec B.

— **Un point et la pente** : on écrit $y = mx + p$ et on calcule p avec le point.

— **Un point et un vecteur directeur** : $\det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}\right) = 0$ (équation cartésienne).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Droite passant par $A(1\,;3)$ et $B(4\,;9)$

$x_A \neq x_B$: la droite n'est pas verticale. $m = \dfrac{9-3}{4-1} = 2$. Puis $3 = 2 \times 1 + p$, donc $p = 1$: $(AB) : y = 2x + 1$. Contrôle avec B : $2 \times 4 + 1 = 9$.

Droite de pente -3 passant par $C(-2\,;5)$

$y = -3x + p$ et $5 = -3 \times (-2) + p = 6 + p$, donc $p = -1$: $y = -3x - 1$.

Tracer une droite

- Équation réduite : on place $(0\,;p)$, puis on avance de 1 et on monte de m (ou on calcule une seconde image).
- Équation cartésienne : on calcule deux points simples, par exemple les intersections avec les axes ($x = 0$, puis $y = 0$), quand elles existent.

Un troisième point sert de contrôle.

Tracer $3x + 2y - 6 = 0$

Pour $x = 0$: $2y = 6$, $y = 3$; pour $y = 0$: $3x = 6$, $x = 2$. La droite passe par $(0\,;3)$ et $(2\,;0)$. Contrôle : $(4\,;-3)$ vérifie $12 - 6 - 6 = 0$.

5. Alignement de trois points

Critère d'alignement

Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires :

$$A, B, C \text{ alignés} \iff \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0.$$

On peut aussi déterminer une équation de (AB) et tester si C la vérifie.

Aligné ou pas ?

$A(-2\,;-5)$, $B(1\,;1)$, $C(4\,;7)$: $\overrightarrow{AB}(3\,;6)$, $\overrightarrow{AC}(6\,;12)$ et $\det = 3 \times 12 - 6 \times 6 = 0$: les points sont alignés.
Avec $D(5\,;8)$: $\overrightarrow{AD}(7\,;13)$ et $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = 3 \times 13 - 7 \times 6 = 39 - 42 = -3 \neq 0$: A, B, D ne sont pas alignés, même si D semble « presque » sur la droite.

6. Positions relatives de deux droites

Parallélisme

- Deux droites sont **parallèles** si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires (déterminant nul).
- Deux droites non verticales $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles si et seulement si $m = m'$. Elles sont alors **confondues** si de plus $p = p'$, **strictement parallèles** sinon.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Deux droites qui ne sont pas parallèles sont **sécantes** : elles ont un unique point commun.

Coefficients directeurs	Droites	Points communs
$m \neq m'$	sécantes	un seul
$m = m'$ et $p \neq p'$	strictement parallèles	aucun
$m = m'$ et $p = p'$	confondues	tous

Point d'intersection de deux droites sécantes

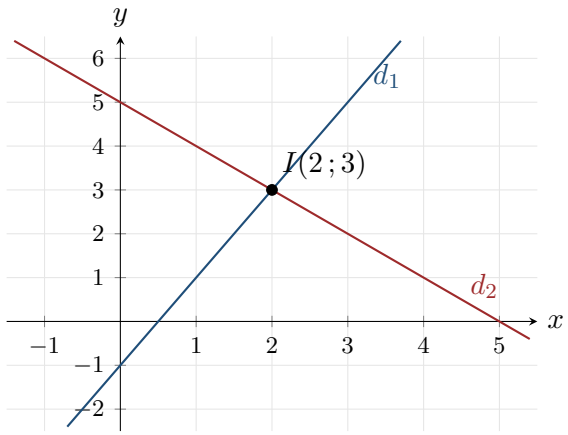
Si $d : y = mx + p$ et $d' : y = m'x + p'$ avec $m \neq m'$, l'abscisse x_0 de leur point d'intersection vérifie

$$mx_0 + p = m'x_0 + p',$$

une équation du premier degré ; son ordonnée est $y_0 = mx_0 + p$.

Intersection de $d_1 : y = 2x - 1$ et $d_2 : y = -x + 5$

Les pentes 2 et -1 diffèrent : les droites sont sécantes. $2x-1 = -x+5 \iff 3x = 6 \iff x = 2$, puis $y = 2 \times 2 - 1 = 3$. Contrôle avec d_2 : $-2 + 5 = 3$. Le point d'intersection est $I(2\,;3)$.



Deux droites sécantes : leur point commun a la même ordonnée sur les deux droites.

Droites données par une équation cartésienne

On écrit d'abord les équations réduites (en isolant y), puis on compare les pentes ; si elles diffèrent, on égalise les deux expressions de y. Si l'une des droites est verticale, d'équation $x = c$, l'abscisse du point commun est directement c.

Intersection de $3x + 2y - 12 = 0$ et $x - 4y + 10 = 0$

Équations réduites : $y = -\dfrac{3}{2}x + 6$ et $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{2}$. Les pentes diffèrent. $-\dfrac{3}{2}x + 6 = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{2}$; en multipliant par 4 : $-6x + 24 = x + 10$, soit $x = 2$, puis $y = -3 + 6 = 3$. Contrôle dans les deux équations de départ : $6 + 6 - 12 = 0$ et $2 - 12 + 10 = 0$. Point d'intersection : $(2\,;3)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Strictement parallèles

$d : y = 2x + 1$ et $d' : 4x - 2y + 3 = 0$, soit $y = 2x + \dfrac{3}{2}$. Même pente 2, ordonnées à l'origine différentes : d et d' sont strictement parallèles. Si l'on égalise quand même, $2x + 1 = 2x + \dfrac{3}{2}$ donne $1 = \dfrac{3}{2}$, faux : aucun point commun.

Pour aller plus loin : régions du plan

La droite $y = mx+p$ partage le plan en deux demi-plans : les points $M(x\,;y)$ tels que $y > mx+p$ sont **au-dessus** de la droite, ceux tels que $y < mx + p$ **au-dessous**. Par exemple, $E(6\,;6)$ est au-dessous de $y = 1{,}5x - 2{,}5$, car $1{,}5 \times 6 - 2{,}5 = 6{,}5 > 6$.

7. Erreurs classiques

À éviter

- Inverser le quotient de la pente : c'est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, « vertical sur horizontal ».
- Oublier les droites verticales : deux points de même abscisse donnent $x = c$, sans pente.
- Prendre $(a\,;b)$ comme vecteur directeur de $ax + by + c = 0$ au lieu de $(-b\,;a)$.
- Conclure « parallèles » avec la même pente sans vérifier l'ordonnée à l'origine : elles peuvent être confondues.
- Ne pas contrôler un point d'intersection dans **les deux** équations.

8. Fiche de synthèse

Vecteur directeur	$\vec{u} \neq \vec{0}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$; $M \in d \iff \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$
Équation cartésienne	$ax + by + c = 0$, $(a\,;b) \neq (0\,;0)$; vecteur directeur $(-b\,;a)$
Équation réduite	$y = mx + p$ (non verticale) ; verticale : $x = c$
Pente	$m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$; vecteur directeur $(1\,;m)$
Alignement	A, B, C alignés $\iff \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$
Parallélisme	$m = m'$ (ou déterminant des vecteurs directeurs nul)
Intersection	$mx + p = m'x + p'$, puis contrôle dans les deux équations

9. Exercices d'application

Exercice 1 – Deux équations pour une droite

Soit $A(-1\,;2)$ et $B(3\,;4)$.

1. Déterminer l'équation réduite de (AB), puis une équation cartésienne à coefficients entiers.
2. Le point $C(7\,;6)$ appartient-il à (AB) ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 2 – Un point et un vecteur directeur

Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par $A(2\,;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1\,;3)$, puis son équation réduite.

Exercice 3 – Positions relatives

On donne $d_1 : y = -\dfrac{1}{2}x + 4$, $d_2 : x + 2y - 2 = 0$ et $d_3 : y = 3x - 3$.

1. Étudier la position relative de d_1 et d_2.
2. Déterminer le point d'intersection de d_1 et d_3, puis celui de d_2 et d_3.

Exercice 4 – Alignement et parallèle

Soit $A(1\,;1)$, $B(4\,;3)$, $C(10\,;7)$ et $D(0\,;-2)$.

1. Montrer que A, B et C sont alignés.
2. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ parallèle à (AB) passant par D, puis le point où elle coupe l'axe des abscisses.

10. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé.

1. $m = \dfrac{4-2}{3-(-1)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$. Puis $2 = \dfrac{1}{2} \times (-1) + p$, donc $p = \dfrac{5}{2}$: $(AB) : y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}$. En multipliant par 2 : $2y = x + 5$, soit $x - 2y + 5 = 0$. Contrôle avec B : $3 - 8 + 5 = 0$.
2. $7 - 2 \times 6 + 5 = 0$: C appartient à (AB).

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $\overrightarrow{AM}(x-2\,;y+1)$ et $\det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}\right) = (x-2)\times 3 - (y+1)\times(-1) = 3x - 6 + y + 1 = 3x + y - 5$. Une équation cartésienne est $3x + y - 5 = 0$ (contrôle avec A : $6 - 1 - 5 = 0$), et l'équation réduite $y = -3x + 5$. La pente -3 est bien $\dfrac{3}{-1}$, quotient des coordonnées de $\vec{u}$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé.

1. $d_2 : 2y = -x + 2$, soit $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$. Même pente que d_1, ordonnées à l'origine différentes (4 et 1) : d_1 et d_2 sont strictement parallèles.
2. $d_1 \cap d_3$: $-\dfrac{1}{2}x + 4 = 3x - 3 \iff 7 = \dfrac{7}{2}x \iff x = 2$, puis $y = 3$: le point $(2\,;3)$. Contrôle : $-1 + 4 = 3$.
   $d_2 \cap d_3$: $-\dfrac{1}{2}x + 1 = 3x - 3 \iff 4 = \dfrac{7}{2}x \iff x = \dfrac{8}{7}$, puis $y = \dfrac{24}{7} - \dfrac{21}{7} = \dfrac{3}{7}$: le point $\left(\dfrac{8}{7}\,;\dfrac{3}{7}\right)$. Contrôle dans d_2 : $\dfrac{8}{7} + \dfrac{6}{7} - 2 = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé.

1. $\overrightarrow{AB}(3\,;2)$ et $\overrightarrow{AC}(9\,;6)$: $\det = 3\times 6 - 9\times 2 = 0$. Les vecteurs sont colinéaires ($\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$), les points sont alignés.
2. La pente de (AB) vaut $\dfrac{2}{3}$; Δ a la même pente et passe par $D(0\,;-2)$, d'où $\Delta : y = \dfrac{2}{3}x - 2$. Elle coupe l'axe des abscisses quand $\dfrac{2}{3}x - 2 = 0$, soit $x = 3$: au point $(3\,;0)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).