

Plaquette 1 – Fréquences observées et prise de décision

Échantillonnage et fluctuation — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules et méthodes pour l'échantillonnage.

- **Fréquence observée** d'un caractère dans un échantillon de taille n :

$$f = \frac{\text{effectif observé}}{n}.$$
- Deux échantillons de même taille tirés dans la même population donnent en général des fréquences **différentes** : c'est la fluctuation d'échantillonnage.
- **Intervalle de fluctuation** (au seuil de 95 %, valable pour $n \geq 25$ et $0,2 \leq p \leq 0,8$) :

$$I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$
- **Règle de décision** : si $f \in I$, l'échantillon est compatible avec l'hypothèse « la proportion vaut p » ; si $f \notin I$, on rejette cette hypothèse (avec un risque d'erreur d'environ 5 %).
- **Amplitude** de I : $\frac{2}{\sqrt{n}}$. Elle diminue quand n augmente : multiplier n par 4 divise l'amplitude par 2.
- Une probabilité ou une fréquence reste dans $[0 ; 1]$: on tronque l'intervalle si besoin.

Correction de l'exercice 1 – Calculer une fréquence observée

- Formule du cours : $f = \frac{\text{effectif}}{n} = \frac{46}{100} = 0,46$.
- Écart avec la valeur théorique : $|0,46 - 0,5| = 0,04$, soit 4 points de pourcentage.
- Cet écart n'a rien d'anormal : sur un échantillon de taille 100, la fréquence fluctue autour de 0,5.

Réponse. $f = 0,46$, écart de 0,04.

Correction de l'exercice 2 – Deux échantillons de tailles différentes

- Échantillon de taille 50 : $f_1 = \frac{21}{50} = 0,42$. Écart à p : 0,08.
- Échantillon de taille 500 : $f_2 = \frac{243}{500} = 0,486$. Écart à p : 0,014.
- Les deux fréquences encadrent 0,5 sans l'atteindre : c'est la fluctuation d'échantillonnage.
- La fréquence du **grand** échantillon est nettement plus proche de p : plus n est grand, moins la fréquence fluctue. C'est ce que traduit l'amplitude $\frac{2}{\sqrt{n}}$ de l'intervalle de fluctuation.

Réponse. $f_1 = 0,42$ et $f_2 = 0,486$: la fluctuation diminue quand n augmente.

Correction de l'exercice 3 – Construire un intervalle de fluctuation

On applique la formule du cours avec $p = 0,5$ et $n = 100$:

$$I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

- $\sqrt{100} = 10$, donc $\frac{1}{\sqrt{n}} = 0,1$.
- $I = [0,5 - 0,1 ; 0,5 + 0,1] = [0,4 ; 0,6]$.
- Comme $0,4 \leq 0,46 \leq 0,6$, la fréquence observée appartient à I : l'échantillon est **compatible** avec une pièce équilibrée.

Réponse. $I = [0,4 ; 0,6]$ et $f = 0,46 \in I$: rien d'anormal.

Correction de l'exercice 4 - Intervalle avec un grand échantillon

- Ici $p = 0,3$ et $n = 400$. Les conditions d'usage sont respectées : $n \geq 25$ et $0,2 \leq p \leq 0,8$.
- $\sqrt{400} = 20$, donc $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{20} = 0,05$.

$$I = [0,3 - 0,05 ; 0,3 + 0,05] = [0,25 ; 0,35]$$
- Autrement dit : dans 95 % des échantillons de taille 400, la fréquence observée sera entre 25 % et 35 %.

Réponse. $I = [0,25 ; 0,35]$.

Correction de l'exercice 5 - Prise de décision dans une usine

- a) $f = \frac{65}{1\,000} = 0,065$, soit 6,5 %.
- b) Avec $p = 0,02$ et $n = 1\,000$: $\sqrt{1\,000} \approx 31,62$, donc $\frac{1}{\sqrt{n}} \approx 0,032$.
- $p - 0,032 = -0,012$: une fréquence ne pouvant être négative, on retient 0.

$$I \approx [0 ; 0,052]$$
- c) $f = 0,065$ n'appartient pas à I : on **rejette** l'affirmation du fabricant au seuil de 95 %. Le lot contient significativement trop de pièces défectueuses.
- Prudence sur la méthode : ici $p = 0,02$ est en dehors des conditions habituelles ($0,2 \leq p \leq 0,8$), l'intervalle n'est qu'indicatif — mais l'écart est si grand que la conclusion reste claire.

Réponse. a) 0,065 · b) $I \approx [0 ; 0,052]$ · c) on rejette l'annonce du fabricant.

Correction de l'exercice 6 - Choisir la taille de l'échantillon

- Amplitude de l'intervalle : $\left(p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(p - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2}{\sqrt{n}}$.
- On résout $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,05$.
- En multipliant par $\sqrt{n}$ (positif) puis en divisant par 0,05 : $\sqrt{n} \geq \frac{2}{0,05} = 40$.
- La fonction carré étant croissante sur les positifs : $n \geq 40^2 = 1\,600$.
- Vérification : pour $n = 1\,600$, $\frac{2}{\sqrt{1\,600}} = \frac{2}{40} = 0,05$. L'amplitude vaut exactement 0,05.

Réponse. $n \geq 1\,600$.

Correction de l'exercice 7 - Simuler avec Python

- La fonction `random()` renvoie un nombre au hasard dans $[0 ; 1[$; la condition `random() < 0.5` est donc vraie avec la probabilité 0,5 : elle simule bien un lancer de pièce.

- La boucle *for* répète l'expérience n fois et la variable *succes* compte les « face ».
- La dernière instruction du corps de la fonction, *return succes / n*, renvoie la **fréquence observée** $f = \frac{\text{succes}}{n}$, et non l'effectif.
- Deux exécutions donnent des valeurs différentes parce que chaque appel à *random()* produit de nouveaux tirages : c'est exactement la fluctuation d'échantillonnage.
- En revanche, pour $n = 1\,000$, la valeur obtenue est presque toujours dans $\left[0,5 - \frac{1}{\sqrt{1\,000}}; 0,5 + \frac{1}{\sqrt{1\,000}}\right] \approx [0,468; 0,532]$.

Réponse. *return succes / n* renvoie la fréquence ; les résultats varient à cause du tirage aléatoire (fluctuation d'échantillonnage).

Correction de l'exercice 8 - Sondage avant une élection

On teste l'hypothèse « la proportion réelle est $p = 0,5$ » (l'élection se joue à égalité).

- $n = 1\,000$, donc $\frac{1}{\sqrt{n}} \approx 0,032$ et

$$I \approx [0,468; 0,532]$$

- La fréquence observée $f = 0,52$ appartient à I : l'hypothèse $p = 0,5$ **n'est pas rejetée**.
- Conclusion : le sondage ne permet pas d'affirmer que le candidat dépasse 50 %. L'écart observé de 2 points est dans la fluctuation normale d'un échantillon de 1 000 personnes.
- Pour conclure, il faudrait un échantillon plus grand : avec $n = 10\,000$, l'amplitude tomberait à $\frac{2}{100} = 0,02$.

Réponse. Non : $0,52 \in [0,468; 0,532]$, l'écart n'est pas significatif.

Correction de l'exercice 9 - Le dé est-il équilibré ?

- Hypothèse : le dé est équilibré, donc $p = \frac{1}{6} \approx 0,167$.
- $n = 300$ donc $\frac{1}{\sqrt{300}} \approx 0,058$.
$$I \approx [0,167 - 0,058; 0,167 + 0,058] = [0,109; 0,225]$$
- Fréquence observée : $f = \frac{62}{300} \approx 0,207$.
- $0,207$ appartient à I : le résultat est compatible avec un dé équilibré, on ne peut pas conclure qu'il est truqué.
- Remarque : 62 « six » au lieu des 50 attendus surprend, mais l'intervalle de fluctuation montre que cet écart reste courant sur 300 lancers.

Réponse. Non : $f \approx 0,207 \in [0,109; 0,225]$.

Correction de l'exercice 10 - Effet de la taille sur l'amplitude

On calcule $\frac{2}{\sqrt{n}}$ pour chaque valeur :

n	100	400	900	2 500
Amplitude	0,200	0,100	0,067	0,040

- $\frac{2}{\sqrt{100}} = \frac{2}{10} = 0,2$; $\frac{2}{\sqrt{400}} = \frac{2}{20} = 0,1$; $\frac{2}{\sqrt{900}} = \frac{2}{30} \approx 0,067$; $\frac{2}{\sqrt{2\,500}} = \frac{2}{50} = 0,04$.

- On observe qu'en multipliant n par 4 (de 100 à 400), l'amplitude est divisée par $2 = \sqrt{4}$.
- Pour diviser l'amplitude par 3, il faut donc multiplier n par $3^2 = 9$: l'amplitude dépend de $\sqrt{n}$, pas de n .

Réponse. 0,200 ; 0,100 ; 0,067 ; 0,040 · il faut multiplier n par 9.

Correction de l'exercice 11 - Vrai ou faux, avec justification

- a) **Faux.** On dit seulement que l'échantillon est **compatible** avec l'hypothèse : on ne la rejette pas, mais on ne la démontre pas.
- b) **Faux.** C'est précisément la fluctuation d'échantillonnage : les fréquences varient d'un échantillon à l'autre.
- c) **Faux.** L'amplitude vaut $\frac{2}{\sqrt{n}}$: elle dépend de $\sqrt{n}$. Multiplier n par 4 ne divise l'amplitude que par 2.
- d) **Vrai.** $\sqrt{25} = 5$, donc $\frac{1}{\sqrt{n}} = 0,2$ et $I = [0,4 - 0,2 ; 0,4 + 0,2] = [0,2 ; 0,6]$.

Réponse. a) faux · b) faux · c) faux · d) vrai.