

Plaquette 4 – Prise de décision : contrôle qualité et tests

Échantillonnage et fluctuation — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

La procédure en cinq étapes.

Étape	Contenu
1	énoncer l'hypothèse : « la proportion vaut p »
2	vérifier $n \geq 25$ et $0,2 \leq p \leq 0,8$
3	calculer $I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$
4	calculer f et le comparer à I
5	conclure : $f \in I \rightarrow$ on ne rejette pas ; $f \notin I \rightarrow$ on rejette

Les deux risques d'un test.

Réalité \ Décision	On rejette	On ne rejette pas
l'hypothèse est vraie	erreur (environ 5 %)	décision correcte
l'hypothèse est fausse	décision correcte	erreur (non contrôlée)

Le seuil de 95 % contrôle le **premier** risque seulement : rejeter à tort une hypothèse vraie. Le second — ne pas détecter un écart réel — dépend de n et de l'ampleur de l'écart.

Trois formulations rigoureuses.

- $f \in I$: « l'échantillon est **compatible** avec l'hypothèse », jamais « l'hypothèse est vraie ».
- $f \notin I$: « on **rejette** l'hypothèse au seuil de 95 % », avec environ 5 % de risque de se tromper.
- Un test ne **démontre** rien : il fournit un argument chiffré pour décider.

Passage fréquence $\leftrightarrow$ effectif. Les bornes en effectif sont $n\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et $n\left(p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, soit

$$np - \sqrt{n} \quad \text{et} \quad np + \sqrt{n}$$

Utile pour dire directement « entre tant et tant d'individus ».

Correction de l'exercice 1 – La procédure complète

- **Étape 1 – hypothèse** : la proportion de germination vaut $p = 0,70$ ✓
- **Étape 2 – conditions** : $n = 100 \geq 25$ et $0,2 \leq 0,7 \leq 0,8$ ✓
- **Étape 3 – demi-amplitude** : $\frac{1}{\sqrt{100}} = 0,1$ ✓
- **Intervalle de fluctuation** :

$$I = [0,70 - 0,10 ; 0,70 + 0,10] = [0,60 ; 0,80]$$
- **Étape 4 – fréquence observée** : $f = \frac{62}{100} = 0,62$ ✓

- **Comparaison** : $0,62 \in [0,60; 0,80]$ ✓
- **Étape 5 — conclusion** : on **ne rejette pas** l'affirmation du fabricant ✓
- **Rédaction attendue** : « au seuil de 95 %, l'échantillon est compatible avec un taux de germination de 70 % » ✓
- **Ce qu'il ne faut pas écrire** : « le fabricant a raison » ✓
- **Bornes en effectif** : $np - \sqrt{n} = 70 - 10 = 60$ et $np + \sqrt{n} = 70 + 10 = 80$ graines ✓
- **Contrôle** : $62 \in [60; 80]$ ✓
- **Marge avant rejet** : $62 - 60 = 2$ graines ✓
- **Décision serrée** : avec 59 graines germées, on aurait rejeté ✓
- **Contrôle** : $\frac{59}{100} = 0,59 < 0,60$ ✓
- **Recommandation** : semer davantage de graines pour trancher ✓

Réponse. $I = [0,60; 0,80]$ et $f = 0,62 \in I$: on ne rejette pas l'affirmation (mais de justesse).

Correction de l'exercice 2 - Le même test sur un grand échantillon

- **Hypothèse** : $p = 0,70$ ✓
- **Fréquence observée** : $f = \frac{1550}{2500} = 0,62$, identique à l'exercice précédent ✓
- **Demi-amplitude** : $\frac{1}{\sqrt{2500}} = \frac{1}{50} = 0,02$ ✓
- **Intervalle** :

$$I = [0,68; 0,72]$$
- **Comparaison** : $0,62 < 0,68$, donc $f \notin I$ ✓
- **Conclusion** : on **rejette** l'affirmation au seuil de 95 % ✓
- **Contraste** : même fréquence, conclusion **opposée** ✓
- **Bornes en effectif** : $0,68 \times 2500 = 1700$ et $0,72 \times 2500 = 1800$ graines ✓
- **Observation** : 1550 graines, soit 150 de moins que la borne basse ✓
- **Écart au taux annoncé** : $0,70 - 0,62 = 8$ points ✓
- **Comparaison à la marge** : $8 > 2$ points, donc l'écart est **quatre fois** la marge ✓
- **Conclusion en langage clair** : le taux réel est nettement inférieur à 70 % ✓
- **Estimation du taux réel** : $J = [0,60; 0,64]$ ✓
- **Contrôle** : $0,62 \pm 0,02$ ✓
- **Leçon** : plus l'échantillon est grand, plus un écart réel devient **détectable** — c'est le second risque du test qui diminue ✓

Réponse. $I = [0,68; 0,72]$ et $f = 0,62 \notin I$: on rejette l'affirmation (le taux réel est proche de 62 %).

Correction de l'exercice 3 - Un dé à tester

- **Hypothèse** : le dé est équilibré, donc $p = 0,5$ pour un résultat pair ✓
- **Conditions** : $900 \geq 25$ et $0,2 \leq 0,5 \leq 0,8$ ✓
- **Demi-amplitude** : $\frac{1}{\sqrt{900}} = \frac{1}{30} \approx 0,0333$ ✓
- **Intervalle** :

$$I \approx [0,4667; 0,5333]$$

- **Fréquence observée** : $f = \frac{486}{900} = 0,54$ ✓

- **Comparaison** : $0,54 > 0,5333$, donc $f \notin I$ ✓
- **Conclusion** : on **rejette** l'hypothèse d'équilibre au seuil de 95 % ✓
- **Bornes en effectif** : $450 - 30 = 420$ et $450 + 30 = 480$ résultats pairs ✓
- **Observation** : 486, soit 6 au-dessus de la borne haute ✓
- **Dépassement en fréquence** : $0,54 - 0,5333 \approx 0,0067$ ✓
- **Prudence nécessaire** : le rejet est **serré**, et il reste environ 5 % de risque d'erreur ✓
- **Sens de l'écart** : le dé semble favoriser le pair ✓
- **Estimation du taux réel** : $J \approx [0,5067; 0,5733]$ ✓
- **Lecture** : même la borne basse dépasse 0,5, ce qui renforce le soupçon ✓
- **Conduite à tenir** : relancer 900 fois pour confirmer — un rejet limite mérite réplication ✓

Réponse. $I \approx [0,467; 0,533]$ et $f = 0,54 \notin I$: on rejette l'équilibre, mais de justesse.

Correction de l'exercice 4 - Les bornes en effectif

- **Hypothèse** : $p = 0,25$ ✓
- **Conditions** : $400 \geq 25$ et $0,2 \leq 0,25 \leq 0,8$ ✓
- **Demi-amplitude** : $\frac{1}{\sqrt{400}} = 0,05$ ✓
- **Intervalle en fréquence** :

$$I = [0,20; 0,30]$$
- **Bornes en effectif** : $np \pm \sqrt{n} = 400 \times 0,25 \pm 20$ ✓
- **Calcul** :

$$[100 - 20; 100 + 20] = [80; 120] \text{ pièces}$$
- **Réponse** : entre 80 et 120 pièces de premier choix ✓
- **Contrôles** : $\frac{80}{400} = 0,20$ ✓ et $\frac{120}{400} = 0,30$ ✓
- **Largeur de la plage** : 40 pièces ✓
- **Contrôle** : $2\sqrt{400} = 40$ ✓
- **Formule remarquable** : la largeur en effectif vaut $2\sqrt{n}$, et non une proportion de n ✓
- **Conséquence** : pour $n = 10\,000$, la plage ferait 200 pièces, soit seulement 2 % de l'effectif ✓
- **Contre** : pour $n = 400$, elle fait 40 pièces, soit 10 % ✓
- **Interprétation** : en **effectif** la plage grandit, en **proportion** elle se resserre ✓
- **Vérification finale** : $\sqrt{10\,000} = 100$, donc $2\sqrt{n} = 200$ ✓

Réponse. Entre 80 et 120 pièces (soit 100 ± 20).

Correction de l'exercice 5 - Choisir la taille pour détecter un écart

- **Principe** : il faut que la demi-amplitude soit inférieure à l'écart à détecter ✓
- **Condition** : $\frac{1}{\sqrt{n}} < 0,05$ ✓
- **Résolution** : $\sqrt{n} > 20$, donc

$$n > 400$$
- **Réponse** : au moins 401 personnes, en pratique 400 ✓
- **Vérification à $n = 400$** : $I = [0,25; 0,35]$ ✓
- **Test d'un écart de 5 points** : une fréquence de 0,25 serait **à la limite** ✓
- **Recommandation de sécurité** : prendre $n = 900$ pour une marge de 3,33 points ✓

- **Intervalle correspondant** : $\approx [0,2667; 0,3333]$ ✓
 - **Test avec $f = 0,25$ et $n = 900$** : $0,25 < 0,2667$, donc rejet **net** ✓
 - **Pour détecter 2 points** : $\frac{1}{\sqrt{n}} < 0,02$, donc $n > 2500$ ✓
 - **Pour détecter 10 points** : $\frac{1}{\sqrt{n}} < 0,10$, donc $n > 100$ ✓
 - **Structure** : diviser l'écart détectable par 2 multiplie n par 4 ✓
 - **Contrôles** : $\frac{2500}{400} = 6,25 = 2,5^2$ ✓ et $\frac{400}{100} = 4 = 2^2$ ✓
 - **Arbitrage concret** : détecter 5 points coûte 400 questionnaires, en détecter 2 en coûte 2500 ✓
 - **Conclusion** : on dimensionne l'échantillon **à partir de l'écart que l'on veut voir** ✓
- Réponse.** $n > 400$ (et $n = 900$ pour une détection confortable).

Correction de l'exercice 6 - Rejeter à tort

- **Hypothèse vraie** : la pièce est bien équilibrée ✓
- **Risque du test** : environ 5 % de rejets à tort ✓
- **Nombre de tests** : 60 ✓
- **Rejets à tort attendus** :

$$0,05 \times 60 = 3$$
- **Réponse** : environ 3 jours sur 60 ✓
- **Nature de ce nombre** : une **espérance**, la valeur observée fluctuera ✓
- **Fourchette plausible** : entre 0 et 7 jours environ ✓
- **Nom de cette erreur** : rejeter une hypothèse **vraie** ✓
- **Conséquence pratique** : une pièce honnête sera déclarée truquée environ une fois sur vingt ✓
- **Intervalle du test** : $I = [0,45; 0,55]$, soit entre 180 et 220 piles ✓
- **Contrôle** : 200 ± 20 piles ✓
- **Comment réduire ce risque ?** En élargissant l'intervalle, par exemple au seuil de 99 % ✓
- **Contrepartie** : on détecterait alors moins bien les pièces réellement truquées ✓
- **Compromis fondamental** : réduire un risque augmente l'autre ✓
- **Sur une année de tests quotidiens** : environ $\frac{365}{20} \approx 18$ rejets à tort ✓
- **Leçon industrielle** : c'est pourquoi on ne stoppe jamais une chaîne sur un seul test — on exige une **confirmation** ✓

Réponse. Environ 3 jours sur 60 (5 % de 60) : c'est le risque de rejeter à tort une hypothèse vraie.

Correction de l'exercice 7 - Ne pas détecter un écart réel

- **Test sur 100 lancers** : $I = [0,45; 0,55]$ ✓
- **Fréquence attendue** : environ 0,54 ✓
- **Position** : $0,54 \in [0,45; 0,55]$ ✓
- **Conclusion** : le test **ne détectera pas** le déséquilibre ✓
- **Nom de cette erreur** : ne pas rejeter une hypothèse **fausse** ✓
- **Test sur 2500 lancers** : $\frac{1}{\sqrt{2500}} = 0,02$, donc $I = [0,48; 0,52]$ ✓
- **Position** : $0,54 > 0,52$ ✓

- **Conclusion** : le test **détectera** le déséquilibre ✓
- **Explication** : un écart de 4 points est invisible avec une marge de 5 points, mais visible avec une marge de 2 points ✓
- **Seuil de détection** : il faut $\frac{1}{\sqrt{n}} < 0,04$, soit $n > 625$ ✓
- **Vérification à $n = 625$** : $I = [0,46 ; 0,54]$, l'écart est **à la limite** ✓
- **Vérification à $n = 900$** : $I \approx [0,4667 ; 0,5333]$, et $0,54 > 0,5333$, donc détection ✓
- **Règle pratique** : pour détecter un écart de d points, il faut $n > \frac{1}{d^2}$ ✓
- **Contrôle avec $d = 0,04$** : $\frac{1}{0,0016} = 625$ ✓
- **Écart de 1 point** : $n > 10\,000$ ✓
- **Leçon** : un test qui ne rejette pas ne prouve **rien** si l'échantillon est petit ✓

Réponse. Non sur 100 lancers ($0,54 \in [0,45 ; 0,55]$), oui sur 2500 ($0,54 \notin [0,48 ; 0,52]$).

Correction de l'exercice 8 - Un test bilatéral mal lu

- **Hypothèse** : $p = 0,40$ ✓
- **Fréquence observée** : $f = \frac{300}{625} = 0,48$ ✓
- **Demi-amplitude** : $\frac{1}{\sqrt{625}} = \frac{1}{25} = 0,04$ ✓
- **Intervalle** :

$$I = [0,36 ; 0,44]$$
- **Comparaison** : $0,48 > 0,44$, donc $f \notin I$ ✓
- **Conclusion du test** : on **rejette** l'hypothèse $p = 0,40$ ✓
- **Le marketing a donc raison sur ce point** : l'annonce de 40 % est démentie ✓
- **Nuance essentielle** : le test est **bilatéral**, il rejette l'égalité sans rien affirmer de plus ✓
- **Ce qui est établi** : la proportion réelle **diffère** de 40 % ✓
- **Ce que l'estimation ajoute** : $J = [0,44 ; 0,52]$ ✓
- **Contrôle** : $0,48 \pm 0,04$ ✓
- **Lecture combinée** : la borne basse 0,44 dépasse 0,40, donc la satisfaction est bien **supérieure** à l'annonce ✓
- **Conclusion complète** : le taux réel est entre 44 et 52 %, soit 4 à 12 points au-dessus de l'annonce ✓
- **Bornes en effectif** : 250 ± 25 , soit entre 225 et 275 clients satisfaits attendus ✓
- **Observation** : 300 clients, largement au-delà ✓
- **Message de méthode** : le **test** rejette, c'est l'**estimation** qui donne le sens de l'écart ✓

Réponse. Le rejet est justifié ($0,48 \notin [0,36 ; 0,44]$), et l'estimation $J = [0,44 ; 0,52]$ confirme que le taux réel dépasse 40 %.

Correction de l'exercice 9 - Conditions non remplies

- a) **Condition sur n** : $20 < 25$, **non remplie** ✓
- **Condition sur p** : $0,2 \leq 0,5 \leq 0,8$, remplie ✓
- **Verdict** : formule **inapplicable** ✓
- **Demi-amplitude qu'on obtiendrait** : $\frac{1}{\sqrt{20}} \approx 0,2236$ ✓

- **Intervalle** : $\approx [0,2764; 0,7236]$, beaucoup trop large pour être utile ✓
- b) **Condition sur n** : $500 \geq 25$, remplie ✓
- **Condition sur p** : $0,9 > 0,8$, **non remplie** ✓
- **Verdict** : formule **inapplicable** ✓
- **Demi-amplitude** : $\frac{1}{\sqrt{500}} \approx 0,0447$ ✓
- **Intervalle** : $\approx [0,8553; 0,9447]$ ✓
- **Problème** : pour p proche de 1, la fluctuation réelle est **plus faible**, donc l'intervalle est trop large ✓
- **Conséquence** : le test devient trop indulgent, il ne rejette presque jamais ✓
- c) **Condition sur n** : $60 \geq 25$, remplie ✓
- **Condition sur p** : $0,2 \leq 0,25 \leq 0,8$, remplie ✓
- **Verdict** : formule **applicable** ✓
- **Demi-amplitude** : $\frac{1}{\sqrt{60}} \approx 0,1291$ ✓
- **Intervalle** : $\approx [0,1209; 0,3791]$ ✓
- **Troncature inutile** : les deux bornes sont bien dans $[0; 1]$ ✓
- **Bornes en effectif** : $60 \times 0,25 \pm \sqrt{60} \approx 15 \pm 7,75$, soit environ $[7; 23]$ pièces ✓
- **Remarque** : l'intervalle reste large, $n = 60$ étant modeste ✓
- **Règle de conduite** : quand une condition manque, on l'**écrit** et l'on renonce à conclure ✓

Réponse. a) non ($n < 25$) · b) non ($p > 0,8$) · c) oui.

Correction de l'exercice 10 - Deux contrôles successifs

- **Hypothèse** : $p = 0,60$ ✓
- **Demi-amplitude pour $n = 400$** : $\frac{1}{\sqrt{400}} = 0,05$ ✓
- **Intervalle** : $I = [0,55; 0,65]$ ✓
- **Premier contrôle** : $0,56 \in I$, on ne rejette pas ✓
- **Second contrôle** : $0,63 \in I$, on ne rejette pas ✓
- **Effectifs correspondants** : $0,56 \times 400 = 224$ et $0,63 \times 400 = 252$ pièces A ✓
- **Réunion des deux contrôles** : $224 + 252 = 476$ pièces A sur 800 ✓
- **Fréquence globale** :

$$f = \frac{476}{800} = 0,595$$
- **Demi-amplitude pour $n = 800$** : $\frac{1}{\sqrt{800}} \approx 0,0354$ ✓
- **Nouvel intervalle** : $\approx [0,5646; 0,6354]$ ✓
- **Test** : $0,595 \in I$, on ne rejette toujours pas ✓
- **Cohérence** : la fréquence globale est très proche de 0,60 ✓
- **Écart** : $|0,595 - 0,60| = 0,005$, soit un demi-point ✓
- **Piège à éviter** : moyenner les deux fréquences donnerait $\frac{0,56 + 0,63}{2} = 0,595$ ✓
- **Ici c'est correct** : les deux échantillons ont la **même taille** ✓
- **Mais en général** : il faut cumuler les effectifs, non moyenner les fréquences ✓
- **Conclusion** : la machine est conforme, et le cumul des contrôles renforce cette conclusion ✓

Réponse. Aucun contrôle ne rejette ($I = [0,55 ; 0,65]$), et le cumul donne $f = 0,595$ sur 800 pièces — machine conforme.

Correction de l'exercice 11 - Test sur une proportion de filles

- **Hypothèse** : $p = 0,52$ ✓
 - **Conditions** : $400 \geq 25$ et $0,2 \leq 0,52 \leq 0,8$ ✓
 - **Fréquence observée** : $f = \frac{186}{400} = 0,465$ ✓
 - **Demi-amplitude** : $\frac{1}{\sqrt{400}} = 0,05$ ✓
 - **Intervalle** :

$$I = [0,47 ; 0,57]$$
 - **Comparaison** : $0,465 < 0,47$, donc $f \notin I$ ✓
 - **Conclusion** : on **rejette** l'hypothèse, la filière recrute bien différemment ✓
 - **Bornes en effectif** : $400 \times 0,52 \pm 20 = 208 \pm 20$, soit $[188 ; 228]$ filles ✓
 - **Observation** : 186 filles, soit 2 de moins que la borne basse ✓
 - **Rejet très serré** : l'écart au seuil vaut 0,005, soit un demi-point ✓
 - **Prudence de rédaction** : « on rejette, mais la décision est limite » ✓
 - **Estimation du taux réel** : $J = [0,415 ; 0,515]$ ✓
 - **Remarque importante** : cette fourchette **contient** 0,52 ✓
 - **Apparente contradiction** : le test rejette, l'estimation n'exclut pas 0,52 ✓
 - **Explication** : les deux intervalles sont centrés différemment, l'un sur p , l'autre sur f , et la décision est à la frontière ✓
 - **Conduite raisonnable** : parler d'un écart à **confirmer** sur une autre promotion ✓
- Réponse.** $I = [0,47 ; 0,57]$ et $f = 0,465 \notin I$: on rejette, mais la décision est très serrée.

Correction de l'exercice 12 - Choisir le seuil

- **Seuil de 95 %** : intervalle plus **étroit** ✓
- **Conséquence** : on rejette plus facilement ✓
- **Seuil de 99 %** : intervalle plus **large** ✓
- **Conséquence** : on rejette plus difficilement ✓
- **Premier risque** : arrêter à tort une production conforme ✓
- **Coût de ce risque** : financier, une chaîne stoppée pour rien ✓
- **Second risque** : laisser passer un lot réellement défectueux ✓
- **Coût de ce risque** : **humain**, un airbag qui ne se déclenche pas ✓
- **Comparaison des coûts** : le second est incomparablement plus grave ✓
- **Conclusion** : il faut privilégier la **détection**, donc le seuil de 95 % — voire plus sensible encore ✓
- **Formulation correcte** : on accepte davantage de fausses alertes pour ne rien laisser passer ✓
- **Quand choisir 99 % ?** Quand une fausse alerte coûte très cher et que l'enjeu n'est pas vital ✓
- **Exemple** : rappeler des millions de produits pour un défaut esthétique ✓
- **Autre levier, bien meilleur** : augmenter n ✓
- **Pourquoi** : un grand échantillon réduit **les deux** risques à la fois ✓
- **Illustration** : passer de $n = 400$ à $n = 10\,000$ divise la marge par 5 sans changer le seuil ✓

- **Recommandation finale** : sur un défaut critique, contrôler beaucoup et exiger une confirmation avant de relâcher un lot ✓

Réponse. Le seuil de 95 % (plus sensible), car laisser passer un défaut critique est bien plus grave qu'une fausse alerte — et surtout, augmenter n réduit les deux risques.

Correction de l'exercice 13 - Comparer un échantillon à une référence

- **Hypothèse** : $p = 0,18$ ✓
- **Condition sur n** : $250 \geq 25$, remplie ✓
- **Condition sur p** : $0,18 < 0,2$, **non remplie de justesse** ✓
- **Décision méthodologique** : on signale la réserve et l'on poursuit, 0,18 étant très proche de 0,2 ✓
- **Fréquence observée** : $f = \frac{58}{250} = 0,232$ ✓
- **Demi-amplitude** : $\frac{1}{\sqrt{250}} \approx 0,0632$ ✓
- **Intervalle** :

$$I \approx [0,1168 ; 0,2432]$$

- **Comparaison** : $0,232 \in I$ ✓
- **Conclusion** : on **ne rejette pas** l'hypothèse ✓
- **Lecture** : le lycée fait mieux que la moyenne, mais pas de façon significative ✓
- **Écart observé** : $23,2 - 18 = 5,2$ points ✓
- **Marge** : 6,3 points ✓
- **Comparaison** : $5,2 < 6,3$, l'écart est dans la marge ✓
- **Bornes en effectif** : $250 \times 0,18 \pm \sqrt{250} \approx 45 \pm 15,8$, soit $[30 ; 60]$ élèves ✓
- **Observation** : 58 élèves, tout juste sous la borne haute ✓
- **Taille nécessaire pour conclure** : il faudrait $\frac{1}{\sqrt{n}} < 0,052$, soit $n > 370$ ✓
- **Recommandation** : cumuler deux promotions pour trancher ✓

Réponse. $I \approx [0,117 ; 0,243]$ et $f = 0,232 \in I$: le lycée fait mieux, mais l'écart de 5,2 points n'est pas significatif.

Correction de l'exercice 14 - Piège de la fréquence exacte

- **Fréquence observée** : $f = 0,50$, égale à p ✓
- **Test** : $0,50 \in [0,40 ; 0,60]$, l'échantillon est compatible ✓
- **Le résultat n'est donc pas anormal** ✓
- **Mais le mot « réussie » est trompeur** : une expérience aléatoire n'a pas de résultat « à atteindre » ✓
- **Probabilité d'obtenir exactement 50 piles** : environ 8 % ✓
- **Lecture** : c'est le résultat **le plus probable**, mais il reste minoritaire ✓
- **Probabilité d'obtenir autre chose que 50** : environ 92 % ✓
- **Conséquence** : obtenir 47 ou 53 piles serait **tout aussi normal** ✓
- **Probabilité d'être entre 40 et 60 piles** : environ 96 % ✓
- **Ce qui serait vraiment suspect** : obtenir exactement 50 piles à **chaque** série de 100 lancers ✓
- **Probabilité de cet enchaînement sur 5 séries** : $0,08^5 \approx 3,3 \times 10^{-6}$ ✓
- **Interprétation d'un tel résultat** : des données inventées, pas une expérience réussie ✓

- **Bonne formulation** : « mon résultat est compatible avec une pièce équilibrée » ✓
- **Ce que l'expérience valide** : le modèle, pas l'habileté de l'expérimentateur ✓
- **Message final** : en statistique, l'absence de fluctuation est plus suspecte que sa présence ✓

Réponse. Le résultat est compatible, mais rien n'est « réussi » : exactement 50 piles n'arrive que dans 8 % des cas, et 47 ou 53 seraient aussi normaux.

Correction de l'exercice 15 - Enchaîner test et estimation

- **Hypothèse** : $p = 0,35$ ✓
- **Conditions** : $900 \geq 25$ et $0,2 \leq 0,35 \leq 0,8$ ✓
- **Fréquence observée** : $f = \frac{342}{900} = 0,38$ ✓
- **Demi-amplitude** : $\frac{1}{\sqrt{900}} \approx 0,0333$ ✓
- **Intervalle de fluctuation** :

$$I \approx [0,3167; 0,3833]$$
- **Test** : $0,38 \in I$ ✓
- **Conclusion du test** : on **ne rejette pas** l'annonce ✓
- **Marge avant rejet** : $0,3833 - 0,38 \approx 0,0033$, soit un tiers de point ✓
- **Décision très serrée** : 346 visiteurs revenus auraient conduit au rejet ✓
- **Contrôle** : $\frac{346}{900} \approx 0,3844 > 0,3833$ ✓
- **Estimation du taux réel** :

$$J \approx [0,38 - 0,0333; 0,38 + 0,0333] = [0,3467; 0,4133]$$
- **Lecture** : le taux réel est entre 34,7 et 41,3 % ✓
- **Position de l'annonce** : $0,35 \in J$, donc cohérente ✓
- **Cohérence des deux approches** : le test ne rejette pas, et l'estimation contient 0,35 ✓
- **Bornes en effectif du test** : 315 ± 30 , soit $[285; 345]$ visiteurs ✓
- **Observation** : 342, juste sous la borne haute ✓
- **Recommandation** : suivre 2500 visiteurs ramènerait la marge à 2 points et trancherait ✓

Réponse. Test : $0,38 \in [0,317; 0,383]$, on ne rejette pas (de justesse). Estimation : $J \approx [0,347; 0,413]$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : audit d'un service client

- a) **Hypothèse** : $p = 0,75$ ✓
- **Conditions** : $625 \geq 25$ et $0,2 \leq 0,75 \leq 0,8$ ✓
 - **Fréquence observée** : $f = \frac{437}{625} = 0,6992$ ✓
 - **Demi-amplitude** : $\frac{1}{\sqrt{625}} = \frac{1}{25} = 0,04$ ✓
 - **Intervalle de fluctuation** :

$$I = [0,71; 0,79]$$
 - **Test** : $0,6992 < 0,71$, donc $f \notin I$ ✓
 - **Conclusion** : on **rejette** la garantie au seuil de 95 % ✓
 - **Bornes en effectif** : $625 \times 0,75 \pm 25 = 468,75 \pm 25$, soit environ $[444; 494]$ appels ✓

— **Observation** : 437 appels, soit 7 de moins que la borne basse ✓

b) **Estimation du taux réel** :

$$J \approx [0,6992 - 0,04 ; 0,6992 + 0,04] = [0,6592 ; 0,7392]$$

— **Lecture** : entre 65,9 et 73,9 % ✓

— **Position de la garantie** : $0,75 \notin J$ ✓

— **Cohérence** : les deux approches concordent, la garantie n'est pas tenue ✓

— **Écart estimé** : de 1 à 9 points sous l'engagement ✓

c) **L'objection est sérieuse** ✓

— **Nature du problème** : un **biais d'échantillonnage**, pas une question de taille ✓

— **Argument de l'entreprise** : le mardi matin est peut-être une heure de pointe ✓

— **Ce que cela invaliderait** : la représentativité, donc toute conclusion sur l'ensemble des appels ✓

— **Point crucial** : augmenter n ne corrigerait **rien** ✓

— **Réponse correcte de l'auditeur** : refaire l'audit avec un tirage **aléatoire** d'appels répartis sur plusieurs semaines, jours et heures ✓

— **Ce qu'il faut conserver** : la conclusion reste valable pour les mardis matin ✓

— **Formulation honnête** : « le mardi matin, la garantie n'est pas tenue ; l'extension à toute la semaine demande un nouvel échantillon » ✓

d) **Taille nécessaire** ✓

— **Condition** : $\frac{1}{\sqrt{n}} < 0,02$ ✓

— **Résolution** : $\sqrt{n} > 50$, donc

$$n > 2500 \text{ appels}$$

— **Durée** : $\frac{2500}{200} = 12,5$ jours, soit 13 jours ✓

— **Verdict** : c'est parfaitement réalisable ✓

— **Avantage supplémentaire** : 13 jours répartis couvrent naturellement plusieurs jours de la semaine, ce qui **réduit aussi le biais** ✓

— **Intervalle correspondant** : $I = [0,73 ; 0,77]$ ✓

— **Détection** : un taux réel de 0,70 serait alors rejeté sans ambiguïté ✓

— **Contrôle** : $0,70 < 0,73$ ✓

— **Recommandation finale** : suivre 2500 appels tirés au hasard sur un mois — cela règle d'un coup la précision **et** la représentativité ✓

Réponse. a) $f \approx 0,699 \notin [0,71 ; 0,79]$, on rejette · b) $J \approx [0,659 ; 0,739]$ · c) l'objection porte sur un biais, non sur la taille : il faut un tirage aléatoire étalé · d) $n > 2500$, soit 13 jours.