

Plaquette 2 – Simulation et stabilisation des fréquences

Échantillonnage et fluctuation – Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Probabilité et fréquence : deux notions à ne pas confondre.

Notion	Nature	Notation
probabilité	valeur théorique , fixe	p
fréquence observée	valeur expérimentale , qui fluctue	$f = \frac{\text{effectif}}{n}$

Loi des grands nombres (version Seconde). Quand la taille n de l'échantillon augmente, la fréquence observée f se rapproche de la probabilité p :

$$|f - p| \text{ devient petit quand } n \text{ grandit}$$

Ce n'est pas une garantie mais une **tendance** : f peut s'écarter de p sur un échantillon donné.

Intervalle de fluctuation au seuil de 95 % (pour $n \geq 25$ et $0,2 \leq p \leq 0,8$) :

$$I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \quad \text{amplitude} = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Les briques Python de la simulation.

Instruction	Rôle
<code>from random import random</code>	importe le générateur
<code>random()</code>	un décimal au hasard dans $[0 ; 1[$
<code>random() < p</code>	vrai avec la probabilité p
<code>randint(a, b)</code>	un entier au hasard entre a et b inclus
<code>for i in range(n)</code>	répète n fois

Structure type d'une simulation. Initialiser un compteur, boucler n fois, incrémenter si l'événement se produit, puis diviser par n pour obtenir la **fréquence**.

Correction de l'exercice 1 – Trois échantillons de tailles croissantes

- **Probabilité théorique** : $p = \frac{1}{6} \approx 0,1667$ ✓
- **Écart pour** $n = 100$: $|0,14 - 0,1667| \approx 0,0267$ ✓
- **Écart pour** $n = 1000$: $|0,168 - 0,1667| \approx 0,0013$ ✓
- **Écart pour** $n = 10\,000$: $|0,1663 - 0,1667| \approx 0,0004$ ✓
- **Tendance** : les écarts **décroissent** quand n augmente ✓
- **Conclusion** : c'est exactement ce qu'annonce la loi des grands nombres ✓
- **Effectifs correspondants** : 14, 168 et 1663 six ✓
- **Contrôles** : $0,14 \times 100 = 14$ ✓ ; $0,168 \times 1000 = 168$ ✓ ; $0,1663 \times 10\,000 = 1663$ ✓
- **Effectif théorique attendu pour** $n = 10\,000$: $\frac{10\,000}{6} \approx 1667$ ✓
- **Écart en effectif** : 4 six de moins, sur 1667 attendus ✓

- **Prudence indispensable** : la décroissance n'est pas garantie à chaque étape ✓
- **Exemple de contre-cas possible** : un échantillon de 10 000 pourrait donner 0,172, plus loin que celui de 1000 ✓
- **Ce qui est garanti** : la **probabilité** d'un écart important devient de plus en plus faible ✓

Réponse. Les écarts à $\frac{1}{6} \approx 0,1667$ passent de 0,027 à 0,0013 puis 0,0004 : les fréquences se stabilisent.

Correction de l'exercice 2 - Décision sur 100 lancers

- **Hypothèse à tester** : $p = 0,5$ ✓
- **Fréquence observée** : $f = \frac{57}{100} = 0,57$ ✓
- **Conditions d'emploi** : $n = 100 \geq 25$ et $0,2 \leq 0,5 \leq 0,8$ ✓
- **Demi-amplitude** : $\frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10} = 0,1$ ✓
- **Intervalle de fluctuation** :

$$I = [0,5 - 0,1; 0,5 + 0,1] = [0,4; 0,6]$$
- **Test** : $0,57 \in [0,4; 0,6]$ ✓
- **Conclusion** : l'échantillon est **compatible** avec l'hypothèse ✓
- **Formulation correcte** : on **ne rejette pas** l'hypothèse ✓
- **Formulation incorrecte** : « la pièce est équilibrée » — le test ne le prouve pas ✓
- **Amplitude de l'intervalle** : $\frac{2}{\sqrt{100}} = 0,2$ ✓
- **Effectifs limites** : entre 40 et 60 piles ✓
- **Marge de l'observation** : $60 - 57 = 3$ piles avant le rejet ✓
- **Risque d'erreur du test** : environ 5 % ✓
- **Interprétation de ce risque** : une pièce parfaitement équilibrée sort de I environ une fois sur vingt ✓

Réponse. Oui : $f = 0,57 \in [0,4; 0,6]$, on ne rejette pas l'hypothèse.

Correction de l'exercice 3 - Même fréquence, autre décision

- **Fréquence observée** : $\frac{228}{400} = 0,57$, identique à l'exercice précédent ✓
- **Demi-amplitude** : $\frac{1}{\sqrt{400}} = \frac{1}{20} = 0,05$ ✓
- **Intervalle de fluctuation** :

$$I = [0,5 - 0,05; 0,5 + 0,05] = [0,45; 0,55]$$
- **Test** : $0,57 > 0,55$, donc $0,57 \notin I$ ✓
- **Conclusion** : on **rejette** l'hypothèse « la pièce est équilibrée » ✓
- **Contraste avec l'exercice précédent** : même fréquence, conclusion **opposée** ✓
- **Explication** : l'intervalle s'est **resserré** parce que n a quadruplé ✓
- **Amplitudes comparées** : 0,2 pour $n = 100$ contre 0,1 pour $n = 400$ ✓
- **Rapport** : $\frac{0,2}{0,1} = 2$, cohérent avec $\sqrt{4} = 2$ ✓
- **Effectifs limites** : entre 180 et 220 piles ✓
- **Dépassement observé** : $228 - 220 = 8$ piles ✓

- **Leçon essentielle** : une même fréquence est d'autant plus **suspecte** qu'elle est observée sur un grand échantillon ✓
- **Intuition** : 57 piles sur 100 peut relever du hasard ; 228 sur 400 beaucoup moins ✓
- **Conséquence pratique** : on ne conclut jamais sur une fréquence sans préciser la **taille** de l'échantillon ✓

Réponse. Oui : $I = [0,45 ; 0,55]$ et $0,57 \notin I$, on rejette l'hypothèse.

Correction de l'exercice 4 - Amplitude et taille de l'échantillon

- **Formule** : amplitude = $\frac{2}{\sqrt{n}}$ ✓

n	$\sqrt{n}$	Amplitude
100	10	0,2
400	20	0,1
2500	50	0,04
10 000	100	0,02

- **Contrôles** : $\frac{2}{10} = 0,2$ ✓ ; $\frac{2}{20} = 0,1$ ✓ ; $\frac{2}{50} = 0,04$ ✓ ; $\frac{2}{100} = 0,02$ ✓
- **De 100 à 400** : n est multiplié par 4, l'amplitude **divisée par 2** ✓
- **De 400 à 10 000** : n est multiplié par 25, l'amplitude divisée par 5 ✓
- **Contrôle** : $\frac{0,1}{0,02} = 5$ et $\sqrt{25} = 5$ ✓
- **Règle générale** : multiplier n par k divise l'amplitude par $\sqrt{k}$ ✓
- **Conséquence coûteuse** : pour **doubler** la précision, il faut **quadrupler** l'échantillon ✓
- **Exemple concret** : passer d'une précision de ± 3 points à $\pm 1,5$ point exige quatre fois plus de personnes interrogées ✓
- **Taille d'un sondage habituel** : $n = 1000$, d'où une amplitude de $\frac{2}{\sqrt{1000}} \approx 0,063$ ✓
- **Lecture** : c'est la fameuse « marge d'erreur de ± 3 points » des instituts ✓
- **Contrôle** : $\frac{1}{\sqrt{1000}} \approx 0,0316$, soit environ 3,2 points ✓
- **Limite économique** : au-delà de quelques milliers de personnes, le gain de précision ne justifie plus le coût ✓

Réponse. 0,2 ; 0,1 ; 0,04 ; 0,02 — multiplier n par k divise l'amplitude par $\sqrt{k}$.

Correction de l'exercice 5 - Choisir n pour une précision donnée

- **Inéquation de départ** : $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,02$ ✓
- **Passage aux inverses** (tous les termes sont positifs) : $\sqrt{n} \geq \frac{1}{0,02} = 50$ ✓
- **Élévation au carré** :

$$n \geq 2500$$
- **Vérification** : $\frac{1}{\sqrt{2500}} = \frac{1}{50} = 0,02$ ✓
- **Contrôle de la borne** : avec $n = 2499$, on aurait $\frac{1}{\sqrt{2499}} \approx 0,02000$, soit un cheveu au-dessus ✓
- **Réponse** : il faut interroger au moins 2500 personnes ✓

- **Pour 1 point de marge** : $\sqrt{n} \geq 100$, donc $n \geq 10\,000$ ✓
- **Pour 5 points** : $\sqrt{n} \geq 20$, donc $n \geq 400$ ✓
- **Pour 0,5 point** : $\sqrt{n} \geq 200$, donc $n \geq 40\,000$ ✓
- **Tableau de synthèse** : 400 ; 2500 ; 10 000 ; 40 000 pour 5 ; 2 ; 1 ; 0,5 point ✓
- **Structure** : diviser la marge par 2 multiplie n par 4 ✓
- **Contrôles** : $\frac{2500}{400} = 6,25$ et $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = 6,25$ ✓
- **Coût réel** : à 8 € l'entretien téléphonique, 2500 personnes coûtent 20 000 € et 40 000 personnes 320 000 € ✓
- **Arbitrage** : c'est pourquoi les sondages publiés se contentent presque tous de ± 3 points ✓

Réponse. $n \geq 2500$ personnes.

Correction de l'exercice 6 - Lire un programme de simulation

- ***Rôle de `randint(1, 6)`** : simule un lancer de dé, chaque face étant équiprobable ✓
- **Deux appels** : simulent deux dés indépendants ✓
- **Condition testée** : la somme des deux dés vaut 7 ✓
- **Rôle du compteur** : il dénombre les lancers où la somme fait 7 ✓
- **Valeur renvoyée** : la **fréquence observée** de l'événement « somme = 7 » ✓
- **Probabilité théorique** : 6 issues favorables sur 36, soit $\frac{1}{6} \approx 0,1667$ ✓
- **Ordre de grandeur attendu** : environ 0,167 ✓
- **Effectif attendu** : $\frac{10\,000}{6} \approx 1667$ ✓
- **Fluctuation prévisible** : de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{10\,000}} = 0,01$ ✓
- **Fourchette raisonnable** : environ $[0,157; 0,177]$ ✓
- **Résultat qui serait suspect** : 0,25, très loin de la théorie — signe d'un bug ✓
- **Erreur classique à éviter** : écrire `randint(1, 5)`, qui exclurait le 6 ✓
- **Autre piège** : `return compteur` au lieu de `compteur / n`, ce qui renverrait un effectif et non une fréquence ✓
- **Modification pour une autre somme** : remplacer 7 par 2 donnerait environ $\frac{1}{36} \approx 0,028$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{10\,000}{36} \approx 278$ lancers ✓

Réponse. Il renvoie la fréquence de « somme = 7 » sur n lancers de deux dés : environ 0,167.

Correction de l'exercice 7 - Corriger un programme

- **Première erreur** : la condition `random() > 0.3` ✓
- **Explication** : `random()` renvoie un décimal de $[0; 1[$, et l'événement `random() > 0.3` a la probabilité 0,7, non 0,3 ✓
- **Correction** : écrire `random() < 0.3` ✓
- **Seconde erreur** : `return succes` renvoie un **effectif** ✓
- **Correction** : écrire `return succes / n` ✓
- **Résultat du programme erroné** : environ 700 au lieu de 0,3 ✓
- **Résultat du programme corrigé** : environ 0,3 ✓
- **Contrôle** : $0,3 \times 1000 = 300$ succès attendus ✓

- **Fluctuation attendue** : de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{1000}} \approx 0,032$ ✓
- **Fourchette raisonnable** : environ $[0,268; 0,332]$ ✓
- **Pourquoi l'erreur de sens passe inaperçue** : le programme s'exécute sans message d'erreur et renvoie un nombre plausible ✓
- **Bon réflexe** : toujours **comparer** le résultat d'une simulation à la valeur théorique ✓
- **Test de cohérence rapide** : avec $p = 0,3$, on doit trouver un résultat proche de 0,3, pas de 0,7 ✓
- **Détail subtil** : *random()* ne renvoie jamais exactement 1, donc les deux conditions sont bien complémentaires en probabilité ✓
- **Contrôle** : $0,3 + 0,7 = 1$ ✓

Réponse. Il faut $random() < 0.3$ et $return succes / n$.

Correction de l'exercice 8 - Estimer π par simulation

- **Aire du carré** : $1 \times 1 = 1$ ✓
- **Aire du quart de disque** : $\frac{\pi \times 1^2}{4} = \frac{\pi}{4}$ ✓
- **Probabilité qu'un point tombe dedans** : $\frac{\pi}{4} \approx 0,7854$ ✓
- **Fréquence observée** : $\frac{782}{1000} = 0,782$ ✓
- **Équation d'estimation** : $\frac{\pi}{4} \approx 0,782$ ✓
- **Estimation** :

$$\pi \approx 4 \times 0,782 = 3,128$$
- **Écart à la vraie valeur** : $|3,128 - 3,1416| \approx 0,0136$ ✓
- **Écart relatif** : $\frac{0,0136}{3,1416} \approx 0,43\%$ ✓
- **Fluctuation attendue sur la fréquence** : $\frac{1}{\sqrt{1000}} \approx 0,0316$ ✓
- **Fluctuation correspondante sur π** : $4 \times 0,0316 \approx 0,126$ ✓
- **Lecture** : l'estimation est connue à environ $\pm 0,13$ près, donc 3,128 est parfaitement cohérent ✓
- **Nombre de points pour gagner un chiffre** : il faudrait diviser la marge par 10, donc multiplier n par 100 ✓
- **Avec 100 000 points** : marge $4 \times \frac{1}{\sqrt{100\,000}} \approx 0,0126$ ✓
- **Verdict sur la méthode** : la méthode de Monte-Carlo est **simple** mais **lente** — elle n'est pas le bon outil pour calculer π ✓
- **Son vrai intérêt** : estimer des aires ou des volumes trop compliqués pour un calcul exact ✓

Réponse. $\pi \approx 4 \times 0,782 = 3,128$ (à $\pm 0,13$ près environ).

Correction de l'exercice 9 - Un sondage sur le tri des déchets

- **Hypothèse** : $p = 0,6$ ✓
- **Fréquence observée** : $\frac{121}{225} \approx 0,5378$ ✓
- **Conditions** : $225 \geq 25$ et $0,2 \leq 0,6 \leq 0,8$ ✓
- **Demi-amplitude** : $\frac{1}{\sqrt{225}} = \frac{1}{15} \approx 0,0667$ ✓
- **Intervalle de fluctuation** :

$$I \approx [0,6 - 0,0667; 0,6 + 0,0667] = [0,5333; 0,6667]$$

- **Test** : $0,5378 \in I$ ✓
- **Conclusion** : l'échantillon **ne contredit pas** l'affirmation ✓
- **Marge** : $0,5378 - 0,5333 \approx 0,0045$, soit une décision **serrée** ✓
- **Effectifs limites** : $0,5333 \times 225 = 120$ et $0,6667 \times 225 = 150$ habitants ✓
- **Observation** : 121 trieurs, soit un seul de plus que la borne basse ✓
- **Contrôle** : avec 120 trieurs, $f = 0,5333$ serait à la limite exacte ✓
- **Avec 119 trieurs** : $f \approx 0,5289 \notin I$, donc rejet ✓
- **Lecture prudente** : le résultat est compatible mais **à la limite** — un second contrôle serait utile ✓
- **Sur un échantillon de 900** : la demi-amplitude tomberait à 0,0333 et l'intervalle à $[0,5667; 0,6333]$ ✓
- **Conséquence** : la même fréquence 0,538 aurait alors conduit au **rejet** ✓

Réponse. Non : $f \approx 0,538 \in [0,533; 0,667]$, mais de justesse.

Correction de l'exercice 10 - Deux simulations, deux résultats

- **Hypothèse** : $p = 0,5$ ✓
- **Demi-amplitude** : $\frac{1}{\sqrt{200}} \approx 0,0707$ ✓
- **Intervalle de fluctuation** :

$$I \approx [0,4293; 0,5707]$$
- **Premier résultat** : $0,47 \in I$ ✓
- **Second résultat** : $0,54 \in I$ ✓
- **Conclusion** : **aucune** erreur, les deux résultats sont normaux ✓
- **Explication** : c'est précisément la fluctuation d'échantillonnage ✓
- **Écart entre les deux élèves** : $0,54 - 0,47 = 0,07$ ✓
- **Comparaison à l'amplitude** : $\frac{0,07}{0,1414} \approx 0,495$, soit la moitié de l'intervalle ✓
- **Effectifs correspondants** : 94 et 108 piles ✓
- **Contrôles** : $0,47 \times 200 = 94$ ✓ et $0,54 \times 200 = 108$ ✓
- **Effectif attendu** : 100 piles ✓
- **Ce qui serait suspect** : deux élèves trouvant **exactement** 0,5 tous les deux ✓
- **Raison** : obtenir pile 100 fois sur 200 n'a qu'environ 5,6 % de chances de se produire ✓
- **Message de méthode** : en simulation, l'absence de fluctuation est plus inquiétante que sa présence ✓

Réponse. Non : $I \approx [0,429; 0,571]$ contient les deux résultats — c'est la fluctuation normale.

Correction de l'exercice 11 - Simuler un sondage

- **Étape 1 — intervalle théorique** : $\frac{1}{\sqrt{100}} = 0,1$, donc $I = [0,35; 0,55]$ ✓
- **Étape 2 — un sondage** : boucler 100 fois, incrémenter si $\text{random}() < 0,45$ ✓
- **Étape 3 — fréquence** : diviser le compteur par 100 ✓
- **Étape 4 — test** : vérifier si cette fréquence est hors de $[0,35; 0,55]$ ✓
- **Étape 5 — répétition** : recommencer 500 fois en comptant les sorties ✓

```

from random import random

def sondage(n, p):
    succes = 0
    for i in range(n):
        if random() < p:
            succes = succes + 1
    return succes / n

def compteSorties(repetitions, n, p):
    sorties = 0
    marge = 1 / (n ** 0.5)
    for k in range(repetitions):
        f = sondage(n, p)
        if f < p - marge or f > p + marge:
            sorties = sorties + 1
    return sorties

print(compteSorties(500, 100, 0.45))

```

- **Résultat attendu** : environ 5 % de 500, soit 25 **sorties** ✓
- **Contrôle** : $0,05 \times 500 = 25$ ✓
- **Fourchette plausible** : entre 15 et 35 environ ✓
- **Interprétation du seuil de 95 %** : il annonce précisément cette proportion de sorties ✓
- **Détail du code** : $n^{0.5}$ calcule $\sqrt{n}$ ✓
- **Contrôle** : $100^{0.5} = 10$, donc *marge* vaut 0,1 ✓
- **Condition de sortie** : le *or* traduit « hors de l'intervalle », des deux côtés ✓
- **Ce qui invaliderait la simulation** : trouver 200 sorties sur 500 — signe d'une erreur de marge ou de condition ✓

Réponse. Environ 25 sorties sur 500, soit les 5 % annoncés par le seuil de 95 %.

Correction de l'exercice 12 - Fréquence cumulée au fil des lancers

- **Écarts à 0,5** : 0,20 ; 0,06 ; 0,03 ; 0,012 ; 0,003 ✓
- **Tendance** : décroissance nette et régulière ✓
- **Conclusion** : la fréquence se **stabilise** autour de 0,5 ✓
- **Après 10 lancers** : la condition $n \geq 25$ n'est pas remplie ✓
- **Donc** : la formule de l'intervalle de fluctuation **ne s'applique pas** ✓
- **Réponse** : on ne peut rien conclure après 10 lancers ✓
- **Ordre de grandeur du hasard sur 10 lancers** : 7 piles sur 10 arrive avec une probabilité d'environ 12 % ✓
- **Intervalle pour $n = 50$** : $\frac{1}{\sqrt{50}} \approx 0,1414$, donc $[0,3586; 0,6414]$ ✓
- **Test** : $0,56 \in I$ ✓
- **Intervalle pour $n = 100$** : $[0,4; 0,6]$, et $0,53 \in I$ ✓
- **Intervalle pour $n = 500$** : $\frac{1}{\sqrt{500}} \approx 0,0447$, donc $[0,4553; 0,5447]$, et $0,512 \in I$ ✓
- **Intervalle pour $n = 1000$** : $\approx [0,4684; 0,5316]$, et $0,497 \in I$ ✓
- **Bilan** : dès que le test est applicable, la pièce est à chaque fois jugée compatible avec l'équilibre ✓
- **Effectifs de piles** : 7 ; 28 ; 53 ; 256 ; 497 ✓
- **Leçon** : un petit échantillon ne permet ni de confirmer ni d'infirmer quoi que ce soit ✓

Réponse. Les écarts passent de 0,20 à 0,003 : la fréquence se stabilise. Après 10 lancers, aucune conclusion n'est possible ($n < 25$).

Correction de l'exercice 13 - Marche aléatoire

- **Nombre de trajets** : $2^4 = 16$, tous équiprobables ✓
- **Position finale** : elle vaut (nombre de +1) – (nombre de –1) ✓
- **Retour en 0** : il faut deux +1 et deux –1 ✓
- **Comptage** : choisir les 2 étapes montantes parmi 4, soit $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ trajets ✓
- **Probabilité** :

$$P(\text{retour en 0}) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0,375$$
- **Position 4** : il faut quatre +1, soit un seul trajet ✓
- **Probabilité** : $\frac{1}{16} = 0,0625$ ✓
- **Positions possibles** : –4, –2, 0, 2, 4 ✓
- **Remarque** : après un nombre **pair** d'étapes, la position est toujours paire ✓
- **Loi des positions** : $\frac{1}{16}$; $\frac{4}{16}$; $\frac{6}{16}$; $\frac{4}{16}$; $\frac{1}{16}$ ✓
- **Contrôle** : $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$ ✓
- **Symétrie** : la loi est symétrique autour de 0 ✓
- **Position moyenne** : 0, par symétrie ✓
- **Position la plus probable** : 0, avec 0,375 ✓
- **Éloignement typique** : $\frac{4 \times 2 + 4 \times 2 + 1 \times 4 + 1 \times 4}{16} = \frac{24}{16} = 1,5$ en distance moyenne à l'origine ✓

Réponse. $P(\text{en 0}) = \frac{6}{16} = 0,375$ et $P(\text{en 4}) = \frac{1}{16} = 0,0625$.

Correction de l'exercice 14 - Probabilité contre fréquence

- a) **Probabilité**, et l'affirmation est **correcte** ✓
 - **Nature** : valeur théorique, fixée par le modèle d'une pièce équilibrée ✓
- b) **Confusion** entre fréquence et probabilité, affirmation **incorrecte** ✓
 - **Ce qui est vrai** : 0,53 est la fréquence **observée** ✓
 - **Ce qui est faux** : en déduire la probabilité ✓
 - **Argument** : $0,53 \in [0,4 ; 0,6]$, donc l'observation est compatible avec $p = 0,5$ ✓
 - **Ce qu'une observation permet** : **estimer** une probabilité inconnue, avec une marge d'erreur ✓
- c) **Fréquence**, affirmation **incorrecte** ✓
 - **Raison** : la fréquence fluctue, elle ne vaut presque jamais exactement 0,5 ✓
 - **Probabilité d'obtenir exactement 500 piles sur 1000** : environ 2,5 % ✓
 - **Ce qui est vrai** : la fréquence est **probablement proche** de 0,5 ✓
 - **Fourchette à 95 %** : $[0,4684 ; 0,5316]$ ✓
- d) **Affirmation correcte dans l'esprit**, mais à nuancer ✓
 - **Ce qui est vrai** : c'est la loi des grands nombres ✓
 - **Nuance indispensable** : le rapprochement n'est pas garanti à **chaque** étape ✓
 - **Contre-exemple possible** : $f = 0,501$ à $n = 1000$ puis $f = 0,508$ à $n = 2000$ ✓

- **Formulation rigoureuse** : la probabilité que f s'écarte de 0,5 de plus d'un seuil fixé tend vers 0 ✓

Réponse. a) probabilité, correcte · b) fréquence, conclusion fausse · c) fréquence, faux · d) vrai, à nuancer.

Correction de l'exercice 15 - Comparer deux villes

- **Fréquence dans A** : $\frac{156}{400} = 0,39$ ✓
- **Fréquence dans B** : $\frac{84}{225} \approx 0,3733$ ✓
- **Écart observé** : $0,39 - 0,3733 \approx 0,0167$, soit 1,7 point ✓
- **Marge pour A** : $\frac{1}{\sqrt{400}} = 0,05$ ✓
- **Marge pour B** : $\frac{1}{\sqrt{225}} \approx 0,0667$ ✓
- **Fourchette pour A** : $[0,34 ; 0,44]$ ✓
- **Fourchette pour B** : $\approx [0,3067 ; 0,44]$ ✓
- **Recouvrement** : les deux fourchettes se recouvrent largement ✓
- **Conclusion** : l'écart de 1,7 point **n'est pas significatif** ✓
- **Test croisé** : la fréquence de B, 0,3733, appartient à la fourchette de A ✓
- **Test réciproque** : la fréquence de A, 0,39, appartient à la fourchette de B ✓
- **Cohérence** : les deux tests concordent ✓
- **Écart minimal pour conclure** : il faudrait un écart supérieur à la somme des marges, soit environ 0,117 ✓
- **Traduction** : plus de 11 points d'écart seraient nécessaires avec ces tailles d'échantillons ✓
- **Alternative** : augmenter les échantillons — avec $n = 10\,000$ de chaque côté, les marges tomberaient à 0,01 et un écart de 1,7 point deviendrait significatif ✓

Réponse. Non : 0,39 et 0,373 ont des fourchettes qui se recouvrent largement, l'écart de 1,7 point n'est pas significatif.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : une machine de remplissage

a) **Fréquence observée** :

$$f = \frac{368}{400} = 0,92$$

- **Bouteilles défectueuses** : $400 - 368 = 32$ ✓
- **Taux de défaut** : $\frac{32}{400} = 8\%$ ✓
- b) **Conditions d'emploi** : $n \geq 25$ et $0,2 \leq p \leq 0,8$ ✓
 - **Première condition** : $400 \geq 25$, remplie ✓
 - **Seconde condition** : $p = 0,95 > 0,8$, **non remplie** ✓
 - **Conclusion** : la formule sort de son domaine de validité ✓
 - **Raison de fond** : pour p très proche de 1, la fluctuation réelle est plus faible que ce que prédit $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ✓
 - **Conséquence** : l'intervalle obtenu serait **trop large**, donc le test trop indulgent ✓
- c) **Application malgré tout** ✓
 - **Demi-amplitude** : $\frac{1}{\sqrt{400}} = 0,05$ ✓

— **Intervalle :**

$$I = [0,95 - 0,05; 0,95 + 0,05] = [0,90; 1]$$

- **Troncature** : la borne haute est ramenée à 1, une fréquence ne pouvant la dépasser ✓
- **Test** : $0,92 \in [0,90; 1]$ ✓
- **Conclusion formelle** : on ne rejette pas l'hypothèse ✓
- **Réserve importante** : avec un intervalle trop large, cette non-décision a peu de valeur ✓
- **Marge apparente** : $0,92 - 0,90 = 0,02$, soit 8 bouteilles ✓

d) **Taille de contrôle nécessaire** ✓

- **Condition** : $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,01$ ✓

- **Résolution** : $\sqrt{n} \geq 100$, donc

$$n \geq 10\,000 \text{ bouteilles}$$

- **Durée** : $\frac{10\,000}{50} = 200$ jours ✓

- **Verdict pratique** : 200 jours, c'est trop long pour piloter une production ✓

- **Piste 1 – contrôler plus** : 500 bouteilles par jour ramènent le délai à 20 jours ✓

- **Piste 2 – accepter 2 points de marge** : $n \geq 2500$, soit 50 jours ✓

- **Contrôle** : $\frac{1}{\sqrt{2500}} = 0,02$ ✓

- **Piste 3 – changer d'outil** : en pratique, l'industrie utilise des cartes de contrôle en continu plutôt qu'un test unique ✓

- **Recommandation** : viser 2500 bouteilles sur 50 jours, en contrôlant chaque jour la dérive plutôt qu'un seul verdict final ✓

Réponse. a) $f = 0,92$ · b) non, car $p = 0,95 > 0,8$ · c) $0,92 \in [0,90; 1]$, pas de rejet (mais test peu informatif) · d) $n \geq 10\,000$, soit 200 jours à 50 par jour.