

Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : santé, médias et sport

Échantillonnage et fluctuation — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Choisir son outil.

Ce que demande l'énoncé	Outil
« ce résultat est-il compatible avec p ? »	intervalle de fluctuation autour de p
« que vaut la proportion ? »	intervalle d' estimation autour de f
« l'écart entre deux groupes est-il réel ? »	comparer les deux fourchettes
« combien de personnes interroger ? »	résoudre $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \text{marge voulue}$

Les deux intervalles côte à côte.

$$I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \quad J = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Le premier est centré sur la valeur **théorique**, le second sur la valeur **observée**.

Conditions d'emploi, à écrire systématiquement. $n \geq 25$ et la proportion concernée dans $[0,2 ; 0,8]$. Hors de ce cadre, la formule **surestime** l'incertitude : la conclusion « on ne rejette pas » perd toute force.

Quatre affirmations à savoir réfuter.

- « 52 % sur 1000 personnes, donc il est élu » — l'avance est dans la marge.
- « 87 % sur notre site, donc les Français sont d'accord » — échantillon auto-sélectionné.
- « le sondage s'est trompé » — une fourchette qui rate la vraie valeur une fois sur vingt est **prévue** par la méthode.
- « avec plus de monde interrogé, on aurait eu la bonne réponse » — vrai pour la précision, faux pour le biais.

Rédaction d'une conclusion. Une phrase de contexte, la valeur, la marge, le niveau de confiance. Jamais un nombre seul.

Correction de l'exercice 1 – Campagne de vaccination

- **Hypothèse** : $p = 0,68$ ✓
- **Conditions** : $400 \geq 25$ et $0,2 \leq 0,68 \leq 0,8$ ✓
- **Fréquence observée** : $f = \frac{256}{400} = 0,64$ ✓
- **Demi-amplitude** : $\frac{1}{\sqrt{400}} = 0,05$ ✓
- **Intervalle de fluctuation** :

$$I = [0,63 ; 0,73]$$
- **Test** : $0,64 \in I$ ✓
- **Conclusion** : on **ne rejette pas** l'annonce de l'agence ✓
- **Écart observé** : $68 - 64 = 4$ points ✓

- **Marge** : 5 points ✓
- **Comparaison** : $4 < 5$, l'écart reste dans la marge ✓
- **Bornes en effectif** : 272 ± 20 , soit $[252 ; 292]$ personnes ✓
- **Observation** : 256 vaccinées, juste au-dessus de la borne basse ✓
- **Estimation du taux réel** : $J = [0,59 ; 0,69]$ ✓
- **Lecture** : la couverture est entre 59 et 69 %, l'annonce de 68 % étant à la limite haute ✓
- **Recommandation** : contrôler 2500 personnes ramènerait la marge à 2 points et trancherait ✓

Réponse. $I = [0,63 ; 0,73]$ et $f = 0,64 \in I$: on ne rejette pas, mais l'estimation $[0,59 ; 0,69]$ place l'annonce en limite haute.

Correction de l'exercice 2 - Deux hôpitaux

- **Taux de A** : $\frac{312}{400} = 0,78$ ✓
- **Taux de B** : $\frac{546}{700} = 0,78$ ✓
- **Constat immédiat** : les deux taux sont **identiques** ✓
- **Réponse** : non, aucune différence à expliquer ✓
- **Marge pour A** : $\frac{1}{\sqrt{400}} = 0,05$ ✓
- **Marge pour B** : $\frac{1}{\sqrt{700}} \approx 0,0378$ ✓
- **Fourchette pour A** : $[0,73 ; 0,83]$ ✓
- **Fourchette pour B** : $\approx [0,7422 ; 0,8178]$ ✓
- **Recouvrement** : total, la fourchette de B est incluse dans celle de A ✓
- **Précision comparée** : B est estimé plus précisément, ayant traité plus de patients ✓
- **Rapport des amplitudes** : $\frac{0,10}{0,0756} \approx 1,32$ ✓
- **Contrôle** : $\sqrt{\frac{700}{400}} \approx 1,32$ ✓
- **Réserve importante** : 0,78 est à la limite du domaine $[0,2 ; 0,8]$ ✓
- **Réserve décisive** : ce chiffre ne dit rien de la **gravité** des cas traités ✓
- **Biais possible** : un hôpital de référence reçoit les cas les plus lourds, ce qui abaisse mécaniquement son taux ✓
- **Conclusion honnête** : les deux taux sont identiques, et une comparaison sérieuse exigerait de tenir compte de la gravité des cas ✓

Réponse. Non : les deux taux valent exactement 0,78, et les fourchettes se recouvrent entièrement.

Correction de l'exercice 3 - Audience d'une émission

- **Hypothèse** : $p = 0,22$ ✓
- **Conditions** : $900 \geq 25$ et $0,2 \leq 0,22 \leq 0,8$ ✓
- **Fréquence observée** : $f = \frac{189}{900} = 0,21$ ✓
- **Demi-amplitude** : $\frac{1}{\sqrt{900}} \approx 0,0333$ ✓
- **Intervalle de fluctuation** :

$$I \approx [0,1867 ; 0,2533]$$

- **Test** : $0,21 \in I$ ✓
- **Conclusion** : on ne rejette pas l'annonce de la chaîne ✓
- **Estimation du taux réel** :

$$J \approx [0,1767; 0,2433]$$

- **Position de l'annonce** : $0,22 \in J$ ✓
- **Cohérence** : les deux approches concordent ✓
- **Écart observé** : 1 point seulement ✓
- **Marge** : 3,3 points ✓
- **Bornes en effectif** : $900 \times 0,22 \pm 30 = 198 \pm 30$, soit $[168; 228]$ foyers ✓
- **Observation** : 189 foyers, bien à l'intérieur ✓
- **Conclusion en langage clair** : l'audience est comprise entre 17,7 et 24,3 %, ce qui est compatible avec les 22 % annoncés ✓
- **Enjeu commercial** : 3 points d'audience représentent des millions d'euros de publicité, d'où la taille des panels réels (plusieurs milliers de foyers) ✓

Réponse. $0,21 \in [0,187; 0,253]$: on ne rejette pas, et $J \approx [0,177; 0,243]$ contient 0,22.

Correction de l'exercice 4 - Tirs au but

- **Hypothèse** : $p = 0,80$ ✓
- **Condition sur n** : $100 \geq 25$, remplie ✓
- **Condition sur p** : $0,80 \leq 0,80$, remplie **tout juste** ✓

- **Fréquence observée** : $f = \frac{68}{100} = 0,68$ ✓

- **Demi-amplitude** : $\frac{1}{\sqrt{100}} = 0,10$ ✓

- **Intervalle de fluctuation** :

$$I = [0,70; 0,90]$$

- **Test** : $0,68 < 0,70$, donc $f \notin I$ ✓
- **Conclusion** : on **rejette** l'annonce au seuil de 95 % ✓
- **Bornes en effectif** : 80 ± 10 , soit $[70; 90]$ tirs réussis ✓
- **Observation** : 68 tirs, soit 2 de moins que la borne basse ✓
- **Rejet serré** : 2 tirs de plus auraient changé la conclusion ✓
- **Estimation du taux réel** : $J = [0,58; 0,78]$ ✓
- **Lecture** : $0,80 \notin J$, ce qui confirme le rejet ✓
- **Réserve** : $p = 0,80$ est à la frontière du domaine, la marge réelle est plus petite, donc le rejet est en fait **plus solide** ✓
- **Réserve pratique** : un entraînement n'est pas un match — les conditions de pression diffèrent ✓

Réponse. $I = [0,70; 0,90]$ et $f = 0,68 \notin I$: on rejette l'annonce (taux réel estimé entre 58 et 78 %).

Correction de l'exercice 5 - Sondage sur deux régions

- **Fréquence pour A** : $\frac{270}{625} = 0,432$ ✓
- **Fréquence pour B** : $\frac{234}{400} = 0,585$ ✓
- **Écart observé** : $0,585 - 0,432 = 0,153$, soit 15,3 points ✓
- **Marge pour A** : $\frac{1}{\sqrt{625}} = 0,04$ ✓

- **Marge pour B** : $\frac{1}{\sqrt{400}} = 0,05$ ✓
- **Fourchette pour A** : $[0,392; 0,472]$ ✓
- **Fourchette pour B** : $[0,535; 0,635]$ ✓
- **Recouvrement** : **aucun**, puisque $0,472 < 0,535$ ✓
- **Conclusion** : l'écart **est significatif** ✓
- **Écart entre les fourchettes** : $0,535 - 0,472 = 0,063$, soit 6,3 points de séparation ✓
- **Comparaison de l'écart à la somme des marges** : $15,3 > 4 + 5 = 9$ points ✓
- **Cohérence** : les deux critères concordent ✓
- **Test croisé** : $0,432 \notin [0,535; 0,635]$ ✓
- **Test réciproque** : $0,585 \notin [0,392; 0,472]$ ✓
- **Formulation correcte** : « la proportion de favorables est nettement plus élevée en B qu'en A » ✓
- **Réserve à mentionner** : cela suppose deux tirages aléatoires **indépendants** dans chaque région ✓

Réponse. Oui : $[0,392; 0,472]$ et $[0,535; 0,635]$ ne se recouvrent pas — l'écart de 15,3 points est significatif.

Correction de l'exercice 6 – Le sondage qui s'est trompé

- **Marge du sondage** : $\frac{1}{\sqrt{1000}} \approx 0,0316$ ✓
- **Fourchette annoncée** : $\approx [0,4384; 0,5016]$ ✓
- **Résultat réel** : 0,51 ✓
- **Test** : $0,51 > 0,5016$, donc le résultat est **hors** de la fourchette ✓
- **Écart au bord** : $0,51 - 0,5016 \approx 0,0084$, soit moins d'un point ✓
- **Première lecture** : la fourchette a bien manqué la vraie valeur ✓
- **Mais** : cela arrive environ **une fois sur vingt**, et c'est **prévu** par la méthode ✓
- **Nature du niveau de confiance** : 95 % signifie précisément 5 % d'échecs ✓
- **Conclusion nuancée** : la méthode n'est pas invalidée par un échec isolé ✓
- **Ce qui l'invaliderait** : des échecs bien plus fréquents que 5 % sur de nombreux sondages ✓
- **Écart entre l'estimation et le résultat** : $51 - 47 = 4$ points ✓
- **Comparaison à la marge** : $4 > 3,2$ points, l'écart dépasse légèrement la marge ✓
- **Autres causes possibles, plus probables qu'un simple hasard** : électeurs indécis, changement d'avis de dernière minute, réponses non sincères ✓
- **Point de méthode** : un sondage mesure une intention à une **date**, pas un résultat futur ✓
- **Titre plus juste** : « l'écart dépasse légèrement la marge d'erreur annoncée » ✓
- **Leçon** : un sondage isolé ne se juge pas sur un seul résultat, mais la méthode se juge sur la **série** des sondages ✓

Réponse. La fourchette $[0,438; 0,502]$ a raté 0,51 de moins d'un point — un échec attendu dans 5 % des cas, non une faute de méthode.

Correction de l'exercice 7 – Dépistage dans un lycée

- **Fréquence observée** : $f = \frac{63}{210} = 0,30$ ✓
- **Conditions numériques** : $210 \geq 25$ et $0,2 \leq 0,30 \leq 0,8$ ✓

- **Demi-amplitude** : $\frac{1}{\sqrt{210}} \approx 0,069$ ✓
- **Fourchette brute** : $\approx [0,231 ; 0,369]$ ✓
- **Obstacle décisif** : le dépistage est **volontaire** ✓
- **Nature du problème** : ce n'est pas un échantillon **aléatoire** ✓
- **Biais probable** : les élèves qui se font dépister sont souvent ceux qui ont des symptômes ou un contact à risque ✓
- **Conséquence** : la fréquence de 0,30 **surestime** probablement le taux du lycée ✓
- **Réponse** : non, on ne peut pas estimer le taux du lycée à partir de cet échantillon ✓
- **Ce que la fourchette estime** : le taux de positifs **parmi les volontaires** ✓
- **Point crucial** : augmenter le nombre de volontaires ne corrigerait rien ✓
- **Méthode correcte** : tirer au sort 210 élèves parmi les 1400 et les dépister tous ✓
- **Taux de sondage correspondant** : $\frac{210}{1400} = 15\%$ ✓
- **Précision alors obtenue** : environ $\pm 6,9$ points ✓
- **Conclusion à rédiger** : « 30 % des volontaires sont positifs ; ce chiffre ne s'étend pas au lycée entier » ✓

Réponse. Non : le dépistage est volontaire, donc biaisé. La fourchette $\approx [0,231 ; 0,369]$ ne concerne que les volontaires.

Correction de l'exercice 8 - Dimensionner une enquête

- **Condition** : $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,025$ ✓
- **Résolution** : $\sqrt{n} \geq 40$, donc

$$n \geq 1600 \text{ personnes}$$
- **Vérification** : $\frac{1}{\sqrt{1600}} = 0,025$ ✓
- **Avec 600 entretiens** : $\frac{1}{\sqrt{600}} \approx 0,0408$ ✓
- **Marge obtenue** : environ 4,1 points ✓
- **Amplitude** : 8,2 points ✓
- **Comparaison** : 4,1 points au lieu de 2,5, soit 63 % de marge en plus ✓
- **Ce que cela permet encore** : trancher si le résultat s'écarte nettement de 50 % ✓
- **Exemple favorable** : avec $f = 0,62$, la fourchette $\approx [0,579 ; 0,661]$ exclut 0,50 ✓
- **Exemple défavorable** : avec $f = 0,53$, la fourchette $\approx [0,489 ; 0,571]$ contient 0,50 ✓
- **Conclusion pratique** : 600 entretiens suffisent si l'opinion est tranchée, pas si elle est partagée ✓
- **Coût comparé** : à 12 € l'entretien, 600 coûtent 7200 € et 1600 coûtent 19 200 € ✓
- **Écart budgétaire** : 12 000 € ✓
- **Stratégie en deux temps** : commencer par 600 entretiens, et n'étendre que si le résultat est serré ✓
- **Nombre à ajouter le cas échéant** : $1600 - 600 = 1000$ entretiens ✓

Réponse. $n \geq 1600$ pour $\pm 2,5$ points ; avec 600 entretiens, la marge monte à $\pm 4,1$ points.

Correction de l'exercice 9 - Proportion de garçons à la naissance

- **Hypothèse** : $p = 0,512$ ✓
- **Conditions** : $2209 \geq 25$ et $0,2 \leq 0,512 \leq 0,8$ ✓

- **Fréquence observée** : $f = \frac{1160}{2209} \approx 0,5251$ ✓
- **Demi-amplitude** : $\frac{1}{\sqrt{2209}} = \frac{1}{47} \approx 0,0213$ ✓
- **Intervalle de fluctuation** :

$$I \approx [0,4907 ; 0,5333]$$
- **Test** : $0,5251 \in I$ ✓
- **Conclusion** : le résultat **n'est pas surprenant** ✓
- **Écart observé** : $0,5251 - 0,512 \approx 1,3$ point ✓
- **Marge** : 2,1 points ✓
- **Bornes en effectif** : $2209 \times 0,512 \pm 47 \approx 1131 \pm 47$, soit [1084 ; 1178] garçons ✓
- **Observation** : 1160 garçons, bien à l'intérieur ✓
- **Nombre attendu** : environ 1131 garçons ✓
- **Écart en effectif** : 29 garçons de plus qu'attendu ✓
- **Estimation du taux de la maternité** : $J \approx [0,5038 ; 0,5464]$ ✓
- **Remarque intéressante** : cette fourchette exclut 0,50, ce qui confirme le léger excédent de garçons — un fait démographique bien établi ✓
- **Point de culture** : cet excédent à la naissance se résorbe au fil des âges, la mortalité masculine étant plus élevée ✓

Réponse. Non : $f \approx 0,525 \in [0,491 ; 0,533]$, l'écart de 1,3 point reste dans la marge de 2,1 points.

Correction de l'exercice 10 - Une machine qui dérive

- **Demi-amplitude** : $\frac{1}{\sqrt{225}} = \frac{1}{15} \approx 0,0667$ ✓
- **Intervalle** : $\approx [0,2333 ; 0,3667]$ ✓
- **Premier contrôle** : $0,29 \in I$ ✓
- **Deuxième** : $0,32 \in I$ ✓
- **Troisième** : $0,35 \in I$ ✓
- **Quatrième** : $0,38 > 0,3667$, donc **hors** de I ✓
- **Rectification** : le quatrième contrôle **est** rejeté ✓
- **Ce qu'il faut remarquer surtout** : les quatre fréquences sont **croissantes** ✓
- **Suite des écarts** : $-0,01 ; +0,02 ; +0,05 ; +0,08$ ✓
- **Régularité** : une hausse de 0,03 à chaque contrôle ✓
- **Diagnostic** : ce n'est pas du hasard, c'est une **dérive** de la machine ✓
- **Probabilité de quatre hausses consécutives par hasard** : environ $\frac{1}{2^3} = 0,125$ pour le seul sens, et bien moins avec une régularité aussi nette ✓
- **Limite du test unique** : il regarde chaque contrôle **isolément** ✓
- **Outil adapté** : suivre la **série** des fréquences dans le temps, c'est le principe des cartes de contrôle ✓
- **Prévision** : au prochain contrôle, on attend environ 0,41 ✓
- **Action recommandée** : régler la machine **maintenant**, sans attendre un second rejet ✓

Réponse. Le quatrième contrôle (0,38) sort de $[0,233 ; 0,367]$, et surtout les quatre fréquences croissent régulièrement de 0,03 : la machine dérive.

Correction de l'exercice 11 - Test ou estimation ?

a) Fluctuation ✓

- **Raison** : une valeur $p = 0,40$ est annoncée, on la **teste** ✓
- **Intervalle centré sur** : $0,40$ ✓
- **Décision** : comparer la fréquence observée à cet intervalle ✓

b) Estimation ✓

- **Raison** : aucune valeur n'est annoncée, on **cherche** la proportion ✓
- **Intervalle centré sur** : la fréquence observée f ✓
- **Réponse attendue** : une fourchette, du type « entre 38 et 46 % » ✓

c) Fluctuation ✓

- **Hypothèse implicite** : le dé équilibré donne $p = \frac{1}{6}$ pour une face donnée ✓
- **Réserve** : $\frac{1}{6} \approx 0,167 < 0,2$, la condition n'est pas remplie ✓
- **Contournement habituel** : tester plutôt « résultat pair », avec $p = 0,5$ ✓
- **Avantage** : $0,5$ est au centre du domaine de validité ✓

d) Estimation ✓

- **Raison** : on cherche une valeur inconnue ✓
 - **Étape supplémentaire** : multiplier les bornes de la fourchette par la **taille de la population** ✓
 - **Nature du résultat** : une fourchette d'effectifs, non de proportions ✓
 - **Règle générale** : « est-ce crédible ? » appelle un test, « combien ? » appelle une estimation ✓
 - **Point commun aux deux** : la même demi-amplitude $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ✓
 - **Différence** : le **centre** de l'intervalle, théorique dans un cas, observé dans l'autre ✓
- Réponse.** a) fluctuation · b) estimation · c) fluctuation · d) estimation.

Correction de l'exercice 12 - Sondage à deux questions

- **Première fréquence** : $f_1 = \frac{540}{900} = 0,60$ ✓
- **Seconde fréquence** : $f_2 = \frac{270}{900} = 0,30$ ✓
- **Demi-amplitude** : $\frac{1}{\sqrt{900}} \approx 0,0333$, la **même** pour les deux ✓
- **Fourchette pour les favorables** :

$$J_1 \approx [0,5667; 0,6333]$$
- **Fourchette pour la connaissance du projet** :

$$J_2 \approx [0,2667; 0,3333]$$
- **Précision absolue** : identique, $\pm 3,3$ points dans les deux cas ✓
- **Réponse à la question posée** : aucune n'est plus précise que l'autre en valeur absolue ✓
- **Précision relative pour f_1** : $\frac{0,0333}{0,60} \approx 5,6\%$ ✓
- **Précision relative pour f_2** : $\frac{0,0333}{0,30} \approx 11,1\%$ ✓
- **Nuance** : en **relatif**, la première est deux fois mieux estimée ✓

- **Conclusion utile sur les favorables** : la borne basse 0,567 dépasse 0,50, la majorité est **significative** ✓
- **Conclusion sur la connaissance du projet** : elle est nettement minoritaire, la borne haute 0,333 restant sous 0,50 ✓
- **Lecture croisée intéressante** : une majorité se dit favorable alors qu'une minorité connaît le projet ✓
- **Commentaire à faire** : un avis favorable exprimé sans connaissance du sujet est fragile ✓
- **Recommandation** : informer avant de consulter ✓
- **Réserve technique** : les deux questions portent sur le **même** échantillon, elles ne sont donc pas indépendantes ✓

Réponse. $J_1 \approx [0,567; 0,633]$ et $J_2 \approx [0,267; 0,333]$: même précision absolue ($\pm 3,3$ points), mais deux fois meilleure en relatif pour la première.

Correction de l'exercice 13 - Le paradoxe des petits échantillons

- **Fréquence observée** : $\frac{2}{80} = 0,025$, soit 2,5 % ✓
- **Taux national** : de l'ordre de 0,03 % ✓
- **Rapport apparent** : environ 83 fois plus ✓
- **Conditions du test** : $80 \geq 25$ mais $0,025 < 0,2$ ✓
- **Verdict** : la formule du cours est **inapplicable** ✓
- **Raison de fond** : l'événement est **trop rare** pour un échantillon de 80 ✓
- **Effet d'un seul individu** : passer de 2 à 1 centenaire ferait chuter le taux à 1,25 % ✓
- **Passer de 2 à 3** : le taux monterait à 3,75 % ✓
- **Amplitude de cette instabilité** : le taux varie du simple au triple selon **une** personne ✓
- **Nombre attendu de centenaires** : $0,0003 \times 80 = 0,024$, soit pratiquement zéro ✓
- **Interprétation** : avoir 2 centenaires est un accident statistique, non une performance ✓
- **Nom de ce phénomène** : les petites populations produisent les **records extrêmes**, dans les deux sens ✓
- **Conséquence prévisible** : le même village afficherait aussi le taux **le plus faible** certaines années ✓
- **Réponse** : non, on ne peut rien conclure ✓
- **Méthode correcte** : comparer des cantons de tailles comparables, ou cumuler plusieurs décennies ✓
- **Application générale** : les classements de petites communes (criminalité, réussite scolaire, longévité) sont dominés par ce seul effet de taille ✓

Réponse. Non : avec $n = 80$ et un événement aussi rare, un seul individu fait varier le taux du simple au triple — les petites populations produisent mécaniquement les records.

Correction de l'exercice 14 - Comparer trois années

- **Demi-amplitude** : $\frac{1}{\sqrt{400}} = 0,05$, identique chaque année ✓
- **Fourchette 2024** : $[0,66; 0,76]$ ✓
- **Fourchette 2025** : $[0,69; 0,79]$ ✓
- **Fourchette 2026** : $[0,73; 0,83]$ ✓
- **Comparaison 2024-2025** : les fourchettes se recouvrent largement ✓

- **Comparaison 2025-2026** : elles se recouvrent aussi ✓
- **Comparaison 2024-2026** : $[0,66 ; 0,76]$ et $[0,73 ; 0,83]$ se recouvrent sur $[0,73 ; 0,76]$ ✓
- **Conclusion par comparaison de fourchettes** : aucun écart n'est significatif pris isolément ✓
- **Mais** : les trois valeurs sont **croissantes** ✓
- **Hausse totale** : $0,78 - 0,71 = 7$ points ✓
- **Hausse annuelle moyenne** : 3,5 points ✓
- **Probabilité de trois valeurs croissantes par pur hasard** : $\frac{1}{6} \approx 0,167$ ✓
- **Lecture** : ce n'est pas négligeable, donc la croissance seule ne prouve rien ✓
- **Formulation prudente** : « une tendance à la hausse se dessine, sans qu'aucun écart annuel ne soit significatif » ✓
- **Ce qui trancherait** : des échantillons de 2500 candidats, ramenant la marge à 2 points ✓
- **Contrôle** : avec cette marge, 0,71 et 0,78 auraient des fourchettes disjointes ✓
- **Autre piste, souvent disponible** : utiliser les résultats de **tous** les candidats plutôt qu'un échantillon ✓

Réponse. Pas d'écart annuel significatif (fourchettes de ± 5 points qui se recouvrent), mais une tendance croissante de 7 points sur trois ans : prudence dans la formulation.

Correction de l'exercice 15 - Rédiger une conclusion

- **Fréquence observée** : $f = \frac{686}{1225} = 0,56$ ✓
- **Conditions** : $1225 \geq 25$ et $0,2 \leq 0,56 \leq 0,8$ ✓
- **Demi-amplitude** : $\frac{1}{\sqrt{1225}} = \frac{1}{35} \approx 0,0286$ ✓
- **Fourchette** :

$$J \approx [0,5314 ; 0,5886]$$
- **Marge en points** : $\pm 2,9$ points ✓
- **Test de la majorité** : $0,5314 > 0,50$ ✓
- **Conclusion sur la majorité** : elle est **significative** ✓
- **Rédaction proposée** : « sur un échantillon aléatoire de 1225 personnes, 56 % se déclarent prêtes à changer d'opérateur ; la proportion réelle est comprise entre 53,1 et 58,9 %, au niveau de confiance de 95 % ; une majorité est donc significativement acquise » ✓
- **Les cinq éléments obligatoires** : la taille, la fréquence, la fourchette, le niveau de confiance, la conclusion en langage clair ✓
- **Ce qu'il ne faut pas écrire** : « 56 % des gens veulent changer » ✓
- **Raison** : cela présente une estimation comme une certitude ✓
- **Autre formulation à éviter** : « plus de la moitié, à 0,5 point près » ✓
- **Raison** : la marge est de 2,9 points, non de 0,5 ✓
- **Mention indispensable** : le caractère **aléatoire** du tirage ✓
- **Effectifs correspondants aux bornes** : 651 et 721 personnes ✓
- **Contrôles** : $0,5314 \times 1225 \approx 651$ ✓ et $0,5886 \times 1225 \approx 721$ ✓

Réponse. $f = 0,56$, $J \approx [0,531 ; 0,589]$ au niveau 95 % : une majorité significative est prête à changer d'opérateur.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : une étude sur le sommeil

a) **Hypothèse** : $p = 0,35$ ✓

— **Conditions** : $400 \geq 25$ et $0,2 \leq 0,35 \leq 0,8$ ✓

— **Fréquence observée** : $f = \frac{164}{400} = 0,41$ ✓

— **Demi-amplitude** : $\frac{1}{\sqrt{400}} = 0,05$ ✓

— **Intervalle de fluctuation** :

$$I = [0,30; 0,40]$$

— **Test** : $0,41 > 0,40$, donc $f \notin I$ ✓

— **Conclusion** : on **rejette** l'hypothèse — ce lycée s'écarte de la moyenne nationale ✓

— **Bornes en effectif** : 140 ± 20 , soit $[120; 160]$ élèves ✓

— **Observation** : 164 élèves, soit 4 de plus que la borne haute ✓

— **Rejet serré** : 3 élèves de moins auraient changé la conclusion ✓

b) **Estimation de la proportion** :

$$J = [0,41 - 0,05; 0,41 + 0,05] = [0,36; 0,46]$$

— **Position de la référence nationale** : $0,35 \notin J$, ce qui confirme le rejet ✓

— **Passage aux effectifs du lycée** : on multiplie par 1800 ✓

— **Borne basse** : $0,36 \times 1800 = 648$ élèves ✓

— **Borne haute** : $0,46 \times 1800 = 828$ élèves ✓

— **Estimation ponctuelle** : $0,41 \times 1800 = 738$ élèves ✓

— **Contrôle** : 738 est bien le centre de $[648; 828]$ ✓

— **Lecture pour le proviseur** : entre 648 et 828 élèves dorment moins de 7 heures ✓

c) **Comparaison des deux lycées** ✓

— **Premier lycée** : $f_1 = 0,41$ avec une marge de 0,05, soit $[0,36; 0,46]$ ✓

— **Second lycée** : $\frac{1}{\sqrt{225}} = \frac{1}{15} \approx 0,0667$ ✓

— **Fourchette** : $\approx [0,4033; 0,5367]$ ✓

— **Recouvrement** : large, sur $[0,4033; 0,46]$ ✓

— **Conclusion** : l'écart **n'est pas significatif** ✓

— **Écart observé** : $0,47 - 0,41 = 6$ points ✓

— **Somme des marges** : $5 + 6,7 = 11,7$ points ✓

— **Comparaison** : $6 < 11,7$ ✓

— **Formulation** : « les deux lycées présentent des taux comparables, tous deux au-dessus de la moyenne nationale » ✓

d) **Taille nécessaire** ✓

— **Condition** : $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,03$ ✓

— **Résolution** : $\sqrt{n} \geq \frac{1}{0,03} \approx 33,33$, donc

$$n \geq 1111 \text{ élèves}$$

— **Comparaison à l'effectif** : 1111 sur 1800, soit 61,7 % du lycée ✓

— **Faisabilité** : possible mais très lourd ✓

— **Nuance mathématique** : quand l'échantillon dépasse 10 % de la population, la précision réelle est **meilleure** que $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ✓

- **Conséquence** : 1111 élèves est une exigence **prudente**, un effectif plus faible suffirait en pratique ✓
- **Alternative simple** : 625 élèves donneraient une marge de 4 points ✓
- **Contrôle** : $\frac{1}{\sqrt{625}} = 0,04$ ✓
- **Recommandation finale** : un questionnaire à 625 élèves tirés au sort suffit pour confirmer l'écart déjà détecté, puisque celui-ci (6 points) dépasse alors la marge ✓

Réponse. a) $f = 0,41 \notin [0,30 ; 0,40]$, on rejette · b) $J = [0,36 ; 0,46]$, soit 648 à 828 élèves · c) non significatif ($6 < 11,7$ points) · d) $n \geq 1111$, lourd — 625 élèves suffiraient en pratique.