Plaquette 1 – Fréquences observées et fluctuation

Échantillonnage et fluctuation — Seconde

Exercices

Méthode

On distingue la **probabilité** p, valeur fixée par le modèle, de la **fréquence observée** f, qui change d'un échantillon à l'autre : c'est la fluctuation d'échantillonnage. On calcule des fréquences, on compare des séries de fréquences obtenues sur des échantillons de tailles différentes, et l'on observe la loi des grands nombres : quand n est grand, sauf exception, f est proche de p.

Exercice 1 – Calculer une fréquence observée

On lance 100 fois une pièce et on obtient 46 fois « face ». Calculer la fréquence observée de « face », puis l'écart avec la probabilité $p = 0{,}5$ d'obtenir « face » avec une pièce équilibrée.

Exercice 2 – Fréquence, effectif et pourcentage

a) Dans un lycée, on interroge 250 élèves : 85 pratiquent un sport en club. Calculer la fréquence correspondante, en décimal puis en pourcentage.

b) Dans un autre lycée, sur 400 élèves interrogés, la fréquence des élèves pratiquant un sport en club est 0,315. Combien d'élèves interrogés pratiquent un sport en club ?

Exercice 3 – Probabilité ou fréquence ?

Pour chaque nombre, dire s'il s'agit d'une probabilité (valeur fixée par un modèle) ou d'une fréquence observée (mesurée sur un échantillon).

a) Un dé équilibré donne « 6 » avec la valeur $\frac{1}{6}$.

b) Sur 60 lancers de ce dé, « 6 » est sorti avec la valeur $\frac{13}{60}$.

c) Dans une urne de 10 boules dont 3 rouges, on tire une boule au hasard : 0,3.

d) Sur 500 personnes interrogées, 0,42 déclarent lire un journal chaque jour.

Exercice 4 – Deux échantillons de tailles différentes

Une urne contient autant de boules blanches que de boules noires. On tire avec remise un échantillon de 50 boules (on obtient 21 blanches), puis un échantillon de 500 boules (on obtient 243 blanches). Calculer les deux fréquences de boules blanches, leurs écarts avec 0,5, et commenter.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

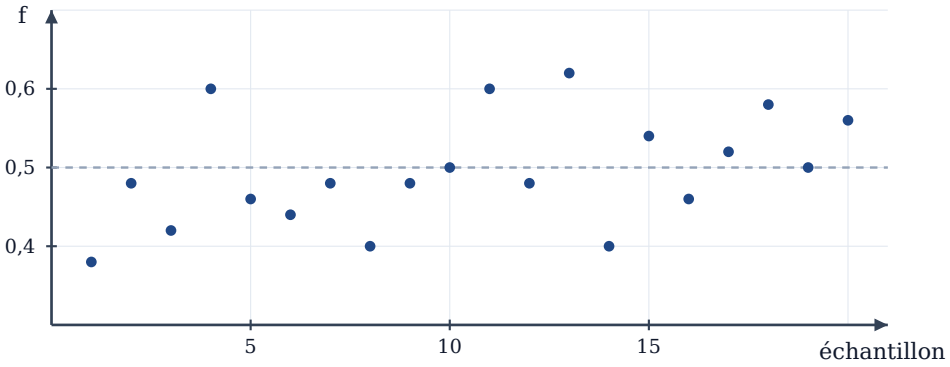
Exercice 5 – Vingt échantillons de taille 50

On a simulé 20 échantillons de 50 lancers d'une pièce équilibrée. Les fréquences de « face » obtenues sont représentées ci-dessous :

0,38 ; 0,48 ; 0,42 ; 0,6 ; 0,46 ; 0,44 ; 0,48 ; 0,4 ; 0,48 ; 0,5 ; 0,6 ; 0,48 ; 0,62 ; 0,4 ; 0,54 ; 0,46 ; 0,52 ; 0,58 ; 0,5 ; 0,56.

a) Donner la plus petite et la plus grande fréquence, puis l'étendue de cette série.

b) Combien d'échantillons ont une fréquence comprise entre 0,4 et 0,6 (bornes incluses) ? Quelle proportion des 20 échantillons cela représente-t-il ?



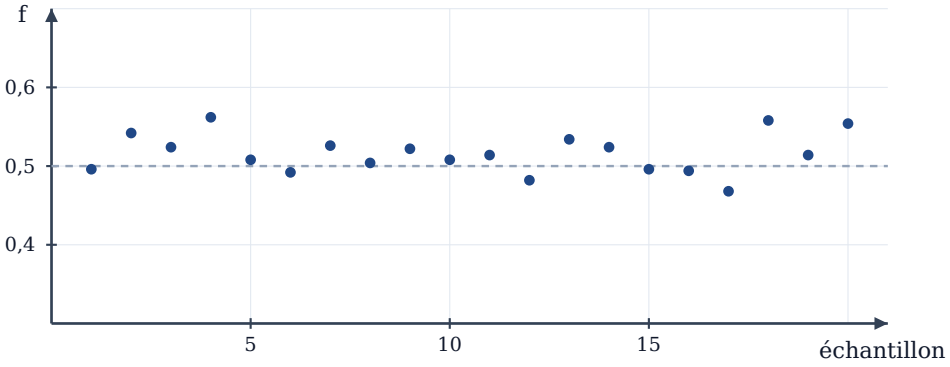
Fréquences de « face » sur 20 échantillons de taille 50

Exercice 6 – Même expérience, échantillons de taille 500

On recommence la simulation de l'exercice précédent avec 20 échantillons de 500 lancers. Les fréquences de « face » varient cette fois de 0,468 à 0,562 ; leur moyenne est environ 0,516.

a) Calculer l'étendue de cette nouvelle série et la comparer à celle des échantillons de taille 50 (étendue 0,24).

b) Quel phénomène met-on ainsi en évidence ?



Fréquences de « face » sur 20 échantillons de taille 500

Exercice 7 – La fréquence d'un « 6 » au fil des lancers

On lance un dé équilibré 5 000 fois et l'on note, à certains moments, le nombre de « 6 » obtenus depuis le début :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Nombre de lancers	10	100	500	1 000	5 000
Nombre de « 6 »	0	14	82	157	809

a) Calculer la fréquence de « 6 » à chacun de ces moments (arrondir au millième).

b) Vers quelle valeur ces fréquences semblent-elles se rapprocher ? Justifier par la probabilité d'obtenir « 6 ».

Exercice 8 – Comprendre la loi des grands nombres

Pour chaque affirmation sur une pièce équilibrée, dire si elle est vraie ou fausse et justifier.

a) Après cinq « pile » de suite, « face » a plus de chances de sortir au lancer suivant.

b) Sur 10 000 lancers, on obtient exactement 5 000 « face ».

c) Sur 10 000 lancers, la fréquence de « face » sera, sauf exception, proche de 0,5.

d) Sur 4 lancers, obtenir 4 « face » est impossible, puisque la probabilité vaut 0,5.

Exercice 9 – Mille échantillons de taille 100

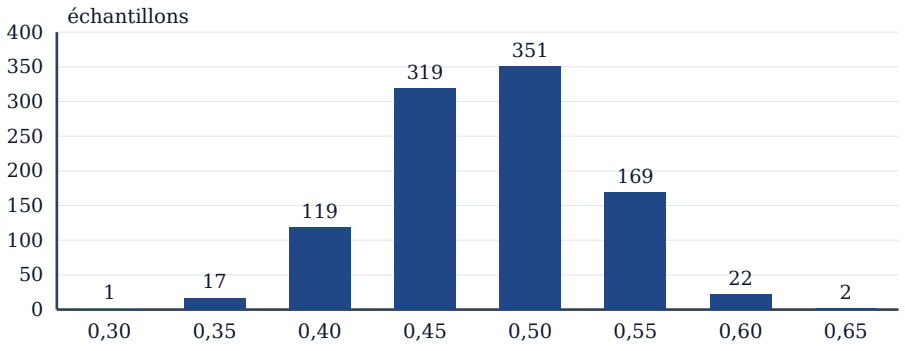
On a simulé 1 000 échantillons de 100 lancers d'une pièce équilibrée et classé les fréquences de « face » obtenues. Chaque barre compte les échantillons dont la fréquence appartient à la classe $[a\,;a+0{,}05[$:

Classe	[0,30 ; 0,35[	[0,35 ; 0,40[	[0,40 ; 0,45[	[0,45 ; 0,50[
Échantillons	1	17	119	319

Classe	[0,50 ; 0,55[	[0,55 ; 0,60[	[0,60 ; 0,65[	[0,65 ; 0,70[
Échantillons	351	169	22	2

a) Quelle proportion des échantillons a une fréquence comprise dans $[0{,}4\,;0{,}6[$?

b) Quelle proportion des échantillons a une fréquence inférieure à 0,35 ou supérieure ou égale à 0,65 ?



Nombre d'échantillons par classe (borne gauche indiquée)

Exercice 10 – Un résultat surprenant ?

Léa lance 100 fois une pièce et obtient 68 « face ». En s'appuyant sur la simulation de l'exercice précédent (1 000 échantillons de 100 lancers d'une pièce équilibrée), dire

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

si un tel résultat est fréquent pour une pièce équilibrée. Que peut-on en penser ?

Exercice 11 – Six cents lancers d'un dé

On lance 600 fois un dé et l'on obtient :

Face	1	2	3	4	5	6
Effectif	88	118	108	108	82	96

a) Si le dé est équilibré, combien de fois s'attend-on « en moyenne » à obtenir chaque face ?

b) Calculer la fréquence de chaque face (arrondir au millième). Quelle face s'écarte le plus de la probabilité $\frac{1}{6}$?

Exercice 12 – Modèle et réalité

Une urne contient 40 jetons, dont 12 sont gagnants. On tire un jeton au hasard, on note s'il est gagnant, on le remet, et l'on recommence.

a) Quelle est la probabilité p de tirer un jeton gagnant ? Sur quelle hypothèse repose ce calcul ?

b) Sur 80 tirages, Tom obtient 29 jetons gagnants. Calculer la fréquence observée. Tom affirme : « la probabilité de gagner est 0,3625 ». Qu'en penser ?

Exercice 13 – Lire une fonction de simulation

On considère la fonction Python suivante.

```
from random import random

def frequence_face(n):
    succes = 0
    for i in range(n):
        if random() < 0.5:
            succes = succes + 1
    return succes / n
```

a) Que simule la condition *random() < 0.5* ? Quel est le rôle de la variable *succes* ?

b) Que renvoie *frequence_face(1000)* ?

c) Pourquoi deux appels successifs à *frequence_face(1000)* ne renvoient-ils pas le même nombre ?

Exercice 14 – Petits et grands échantillons

On a simulé, pour plusieurs tailles n, 200 échantillons d'une expérience où la probabilité de succès vaut 0,3. Pour chaque taille, on a calculé la moyenne et l'écart type des 200 fréquences obtenues :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Taille n	25	100	400	1 600
Moyenne des fréquences	0,300	0,297	0,301	0,301
Écart type des fréquences	0,085	0,045	0,025	0,012

a) Que constate-t-on sur les moyennes ?

b) Que constate-t-on sur les écarts types quand la taille est multipliée par 4 ?

c) Un institut veut que ses fréquences s'écartent typiquement de moins de 0,03 de la vraie proportion. D'après ce tableau, quelle taille parmi celles proposées suffit ?

Exercice 15 – Synthèse : la roue de la kermesse

À la kermesse, une roue est partagée en quatre secteurs identiques, dont un seul est gagnant. On suppose la roue bien équilibrée.

a) Quelle est la probabilité p de gagner à une partie ?

b) Le premier jour, sur 40 parties, il y a eu 14 gagnants. Calculer la fréquence de gain. Les organisateurs s'inquiètent : « la roue fait gagner beaucoup trop ». Que leur répondre ?

c) Sur l'ensemble du mois, la roue a été jouée 2 000 fois, avec 489 gagnants. Calculer la fréquence de gain du mois.

d) Laquelle des deux fréquences renseigne le mieux sur l'équilibre de la roue ? Justifier.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).