

## Plaquette 2 - Simulation et stabilisation des fréquences

### Échantillonnage et fluctuation — Seconde

#### Exercices

#### Méthode

Simuler, c'est reproduire le hasard avec un générateur de nombres aléatoires pour **observer** ce que la théorie prédit. On vérifie que la fréquence observée se rapproche de la probabilité quand  $n$  grandit, et l'on s'entraîne à lire, écrire et corriger des programmes Python de simulation.

#### Exercice 1 - Trois échantillons de tailles croissantes

On simule des lancers d'un dé équilibré et on relève la fréquence du 6 : 0,14 sur 100 lancers, 0,168 sur 1000 lancers, 0,1663 sur 10 000 lancers. Commenter.

#### Exercice 2 - Décision sur 100 lancers

On lance 100 fois une pièce et on obtient 57 piles. Cet échantillon est-il compatible avec l'hypothèse « la pièce est équilibrée » ?

#### Exercice 3 - Même fréquence, autre décision

On relance la même pièce 400 fois et l'on obtient 228 piles, soit la même fréquence 0,57. La conclusion change-t-elle ?

#### Exercice 4 - Amplitude et taille de l'échantillon

Calculer l'amplitude de l'intervalle de fluctuation pour  $n = 100, 400, 2500$  et 10 000. Quelle régularité observe-t-on ?

#### Exercice 5 - Choisir $n$ pour une précision donnée

Un institut veut une marge d'erreur d'au plus 2 points, c'est-à-dire  $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,02$ . Quelle taille d'échantillon lui faut-il ?

#### Exercice 6 - Lire un programme de simulation

Expliquer ce que calcule ce programme, puis prévoir l'ordre de grandeur du résultat affiché.

```
from random import randint

def simulation(n):
    compteur = 0
    for i in range(n):
        de1 = randint(1, 6)
        de2 = randint(1, 6)
        if de1 + de2 == 7:
            compteur = compteur + 1
    return compteur / n
```

```
print(simulation(10000))
```

### Exercice 7 - Corriger un programme

Ce programme doit renvoyer la fréquence de succès d'une expérience de probabilité 0,3. Trouver les deux erreurs.

```
from random import random

def frequence(n):
    succes = 0
    for i in range(n):
        if random() > 0.3:
            succes = succes + 1
    return succes

print(frequence(1000))
```

### Exercice 8 - Estimer $\pi$ par simulation

On tire 1000 points au hasard dans un carré de côté 1 et l'on compte ceux qui tombent dans le quart de disque de rayon 1 : on en trouve 782. En déduire une estimation de  $\pi$ .

### Exercice 9 - Un sondage sur le tri des déchets

Une commune affirme que 60 % de ses habitants trient leurs déchets. Un contrôle sur 225 habitants en trouve 121. Cet échantillon contredit-il l'affirmation ?

### Exercice 10 - Deux simulations, deux résultats

Deux élèves simulent chacun 200 lancers d'une pièce équilibrée. L'un trouve 0,47, l'autre 0,54. L'un des deux a-t-il fait une erreur ?

### Exercice 11 - Simuler un sondage

Écrire, en décrivant les étapes, un programme qui simule 500 sondages de taille 100 dans une population où  $p = 0,45$ , et qui compte combien de fois la fréquence observée sort de l'intervalle de fluctuation.

### Exercice 12 - Fréquence cumulée au fil des lancers

On note la fréquence de « pile » après 10, 50, 100, 500 et 1000 lancers : 0,70 ; 0,56 ; 0,53 ; 0,512 ; 0,497. Interpréter et dire si l'on peut conclure après 10 lancers.

### Exercice 13 - Marche aléatoire

Un pion part de 0 ; à chaque étape il avance de +1 ou recule de -1, avec la même probabilité. Après 4 étapes, calculer la probabilité qu'il soit revenu en 0, puis qu'il soit en 4.

**Exercice 14 – Probabilité contre fréquence**

Dire pour chaque phrase s'il s'agit d'une probabilité ou d'une fréquence, et si elle est correcte.

- a) « La probabilité d'obtenir pile est 0,5. »
- b) « J'ai obtenu 0,53 de piles sur 100 lancers, donc la probabilité est 0,53. »
- c) « Sur 1000 lancers, la fréquence sera exactement 0,5. »
- d) « Plus je lance, plus la fréquence se rapproche de 0,5. »

**Exercice 15 – Comparer deux villes**

Dans la ville A, 156 personnes sur 400 utilisent le vélo ; dans la ville B, 84 sur 225. Peut-on affirmer que la pratique diffère ?

**Exercice 16 – Synthèse : une machine de remplissage**

Une machine doit remplir correctement 95 % des bouteilles. Un contrôle porte sur 400 bouteilles et en trouve 368 correctes.

- a) Calculer la fréquence observée.
- b) Peut-on utiliser l'intervalle de fluctuation vu en classe ? Pourquoi ?
- c) On décide malgré tout de l'appliquer. Que conclut-on ?
- d) Le responsable qualité veut détecter un taux réel de 92 % avec une marge de 1 point. Quelle taille de contrôle faut-il, et combien de temps si l'on contrôle 50 bouteilles par jour ?