Plaquette 2 – Simulation et stabilisation des fréquences

Échantillonnage et fluctuation — Seconde

Exercices

Méthode

Simuler, c'est reproduire le hasard avec un générateur de nombres aléatoires pour **observer** ce que le modèle prévoit. On lit, on exécute à la main, on corrige et on écrit des programmes Python de simulation, puis on vérifie que la fréquence observée se rapproche de la probabilité quand le nombre de répétitions grandit.

Exercice 1 – Simuler un événement de probabilité donnée

On rappelle que *random()* renvoie un nombre décimal au hasard dans [0 ; 1[.

a) Avec quelle probabilité la condition *random() < 0.3* est-elle vraie ?

b) Un joueur de basket réussit 65 % de ses lancers francs. Écrire une condition Python qui simule la réussite d'un lancer.

c) Pourquoi la condition *random() < 1* ne simule-t-elle rien d'intéressant ?

Exercice 2 – Simuler un dé et l'événement « pair »

On considère les instructions suivantes.

```
from random import randint

d = randint(1, 6)
if d == 2 or d == 4 or d == 6:
    print("pair")
else:
    print("impair")
```

a) Quelles valeurs la variable *d* peut-elle prendre ? Avec quelle probabilité chacune, si l'on suppose le générateur parfait ?

b) Quelle est la probabilité que le programme affiche « pair » ?

c) Modifier la condition pour afficher « gagné » lorsque le dé donne 5 ou 6. Quelle est alors la probabilité d'afficher « gagné » ?

Exercice 3 – Exécuter une simulation à la main

On considère la fonction suivante.

```
from random import random

def simulation(n):
    succes = 0
    for i in range(n):
        if random() < 0.4:
            succes = succes + 1
    return succes / n
```

Lors de l'appel *simulation(5)*, les cinq appels à *random()* renvoient successivement 0,12 ; 0,75 ; 0,43 ; 0,91 ; 0,38.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Donner la valeur de *succes* après chaque passage dans la boucle.

b) Quelle valeur la fonction renvoie-t-elle ? Que représente-t-elle ?

Exercice 4 – Corriger un programme

Un élève veut une fonction qui renvoie la fréquence des « 6 » sur n lancers de dé. Il écrit :

```
from random import randint

def frequence_six(n):
    for i in range(n):
        compteur = 0
        if randint(1, 6) == 6:
            compteur = compteur + 1
    return compteur
```

a) Il appelle *frequence_six(1000)* plusieurs fois et n'obtient que 0 ou 1. Expliquer pourquoi.

b) Repérer une seconde erreur, puis écrire la fonction corrigée.

Exercice 5 – La somme de deux dés

On lance deux dés équilibrés et on s'intéresse à la somme des deux faces.

a) En dressant le tableau des 36 issues équiprobables, calculer la probabilité d'obtenir une somme égale à 7.

b) Écrire une fonction *somme_deux_des()* qui simule ce lancer et renvoie la somme.

c) Une simulation a donné 16 sommes égales à 7 sur 100 lancers, 165 sur 1 000 et 1 647 sur 10 000. Calculer les fréquences et commenter.

Exercice 6 – Attendre le premier 6

On considère la fonction suivante.

```
from random import randint

def attente():
    lancers = 1
    while randint(1, 6) != 6:
        lancers = lancers + 1
    return lancers
```

a) Lors d'un appel, les lancers donnent successivement 3, 5, 1 puis 6. Que renvoie la fonction ?

b) Que représente, en général, la valeur renvoyée ?

c) Pourquoi a-t-on utilisé une boucle *while* et non une boucle *for* ?

Exercice 7 – Une simulation au tableur

Dans une feuille de calcul, on saisit *=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)* dans la cellule A1, puis on recopie cette formule jusqu'à A500. Dans la cellule C1, on saisit

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

=NB.SI(A1:A500;6)/500.

a) Que contiennent les cellules A1 à A500 ?

b) Que calcule la cellule C1 ? Autour de quelle valeur s'attend-on à la trouver ?

c) À chaque appui sur F9, la valeur de C1 change. Pourquoi ? Comment rendre les valeurs de C1 plus stables d'un appui à l'autre ?

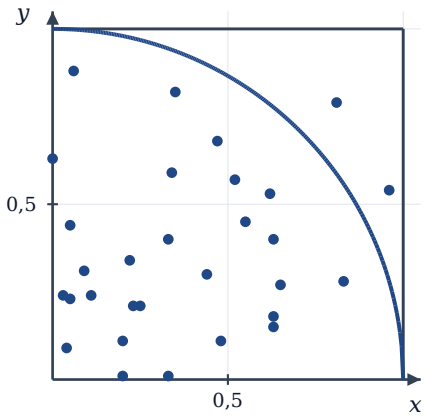
Exercice 8 – Estimer π par simulation

On choisit au hasard un point $M(x\,;y)$ dans le carré $[0\,;1]\times[0\,;1]$, avec x = *random()* et y = *random()*. On admet que la probabilité que M tombe dans le quart de disque de centre O et de rayon 1 est égale à l'aire de ce quart de disque.

a) Calculer cette probabilité. À quelle condition sur x et y le point M est-il dans le quart de disque ?

b) La figure montre 30 points tirés au hasard. Combien sont dans le quart de disque ? En déduire une estimation de π.

c) Sur 100 000 points, une simulation en a compté 78 360 dans le quart de disque. Quelle estimation de π obtient-on ?



30 points tirés au hasard dans le carré unité

Exercice 9 – Une marche aléatoire

Un pion part de la graduation 0 d'une droite. À chaque étape, il avance de 1 ou recule de 1, avec la même probabilité.

```
from random import random

def marche(n):
    position = 0
    for i in range(n):
        if random() < 0.5:
            position = position + 1
        else:
            position = position - 1
    return position
```

a) Lors d'un appel *marche(6)*, *random()* renvoie 0,7 ; 0,2 ; 0,4 ; 0,9 ; 0,1 ; 0,3. Donner les positions successives et la valeur renvoyée.

b) Expliquer pourquoi *marche(6)* renvoie toujours un nombre pair.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Deux simulations, deux résultats

Pour estimer la probabilité d'obtenir un « 6 » avec un dé, Anaïs a simulé 20 lancers et obtenu 7 « 6 » ; Bruno a simulé 2 000 lancers et obtenu 326 « 6 ».

a) Calculer les deux fréquences.

b) Anaïs pense que son programme est faux, puisque sa fréquence est loin de $\frac{1}{6}$.
A-t-elle raison ?

c) Laquelle des deux fréquences est la meilleure estimation de la probabilité ? Justifier.

Exercice 11 – Probabilité contre fréquence

On lance deux pièces équilibrées et l'on note les deux faces obtenues.

a) Lister les issues équiprobables et calculer la probabilité d'obtenir deux « face ».

b) Compléter la condition pour que la fonction suivante simule cet événement.

```
from random import random

def deux_faces():
    piece1 = random() < 0.5
    piece2 = random() < 0.5
    return ...
```

c) Sur 1 000 simulations, l'événement s'est produit 255 fois. Comparer la fréquence observée à la probabilité.

Exercice 12 – Simuler un sondage

Dans une grande ville, 40 % des habitants sont favorables à un projet de tramway. On simule des sondages auprès de n habitants tirés au hasard :

```
from random import random

def sondage(n):
    oui = 0
    for i in range(n):
        if random() < 0.4:
            oui = oui + 1
    return oui / n
```

Cinq appels à *sondage(100)* ont donné 0,45 ; 0,38 ; 0,39 ; 0,48 ; 0,35, et cinq appels à *sondage(1000)* ont donné 0,395 ; 0,415 ; 0,386 ; 0,401 ; 0,38.

a) Que représente chaque nombre renvoyé ?

b) Calculer l'étendue de chacune des deux séries. Que constate-t-on ?

Exercice 13 – Deux façons de simuler une probabilité de un tiers

Un sac contient 1 jeton rouge et 2 jetons bleus ; on tire un jeton au hasard. On propose deux conditions pour simuler « le jeton est rouge » :

— condition A : *random() < 1/3* ;
— condition B : *randint(1, 3) == 1*.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Calculer la probabilité de tirer le jeton rouge.

b) Expliquer pourquoi les deux conditions conviennent.

c) Un élève propose *randint(0, 3) == 0*. Pourquoi est-ce une erreur ? Quelle probabilité simule-t-il ?

Exercice 14 – Une fonction à deux arguments

On veut une fonction qui simule n répétitions d'une expérience dont la probabilité de succès est p, et qui renvoie la fréquence de succès.

a) Écrire cette fonction *frequence(n, p)*.

b) Quel appel permet de simuler 500 lancers d'une pièce équilibrée ? 2 000 tirages dans une urne où 15 % des boules sont rouges, en comptant les rouges ?

c) Un élève obtient *frequence(10, 0.5)* = 0,8. Est-ce la preuve d'une erreur dans sa fonction ?

Exercice 15 – Synthèse : le problème du duc de Toscane

Au XVII^{e} siècle, le duc de Toscane avait remarqué qu'en lançant trois dés, la somme 10 sortait plus souvent que la somme 9, alors que ces deux sommes s'obtiennent chacune de six façons « sans tenir compte de l'ordre ». Galilée lui donna l'explication.

a) Écrire une fonction *somme_trois_des()* qui simule le lancer de trois dés et renvoie la somme.

b) Une simulation a donné les résultats suivants. Calculer les fréquences de chaque somme pour 100 000 lancers.

Nombre de lancers	1 000	10 000	100 000
Sommes égales à 9	110	1 183	11 713
Sommes égales à 10	115	1 234	12 502

c) En comptant les $6^3 = 216$ issues équiprobables (les dés étant distingués), on trouve 25 issues de somme 9 et 27 issues de somme 10. Calculer les deux probabilités et les comparer aux fréquences.

d) Pourquoi le duc a-t-il dû jouer très longtemps pour s'apercevoir de la différence ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).