MATHÉMATIQUES

Échantillonnage et fluctuation

Seconde

Échantillon • Fréquence observée • Fluctuation d'échantillonnage
Loi des grands nombres • Simulation • Python • Tableur • Monte-Carlo

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de mathématiques de seconde générale et technologique** (arrêté du 26 février 2026, BO n°14 du 2 avril 2026, rentrée 2026), partie « Statistiques et probabilités » et partie transversale « Algorithmique et programmation ». Il couvre :

- échantillon, fréquence observée, fluctuation d'échantillonnage, observée **par simulation** ;
- version vulgarisée de la loi des grands nombres : « lorsque n est grand, sauf exception, la fréquence observée est proche de la probabilité » ;
- distinguer modèle probabiliste et situation réelle ; construire un modèle à partir de fréquences observées ;
- écrire des fonctions Python renvoyant le résultat d'une expérience aléatoire ou d'une répétition d'expériences ; série statistique obtenue en répétant l'appel d'une telle fonction.

L'intervalle de fluctuation et les règles de décision ne sont pas au programme de seconde.

Objectif : observer par simulation la fluctuation d'une fréquence d'un échantillon à l'autre, comprendre la loi des grands nombres et l'utiliser pour estimer une probabilité.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Échantillon et fréquence **3**

2 La fluctuation d'échantillonnage **3**

3 Loi des grands nombres **4**

4 Estimer une probabilité **4**

5 Simuler avec Python et le tableur **5**

6 Erreurs classiques **6**

7 Fiche de synthèse **6**

8 Exercices d'application **6**

9 Corrigés des exercices **7**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Échantillon et fréquence

Vocabulaire

— La **population** est l'ensemble étudié (les électeurs d'un pays, les pièces produites par une machine).

— Un **échantillon** de taille n est formé de n individus tirés au hasard dans la population, ou des résultats de n répétitions indépendantes d'une même expérience aléatoire.

— Si un caractère apparaît k fois dans l'échantillon, sa **fréquence observée** est

$$\boxed{f = \frac{k}{n}} \qquad 0 \leq f \leq 1.$$

46 « face » sur 100 lancers donnent $f = 0{,}46$; l'écart avec 0,5 est de 4 points.

Modèle et réalité

La **probabilité** p est fixée par un **modèle** (« la pièce est équilibrée » donne $p = 0{,}5$) : c'est une hypothèse. La **fréquence** f est **mesurée** sur des résultats réels ou simulés : elle change d'un échantillon à l'autre.

2. La fluctuation d'échantillonnage

Fluctuation

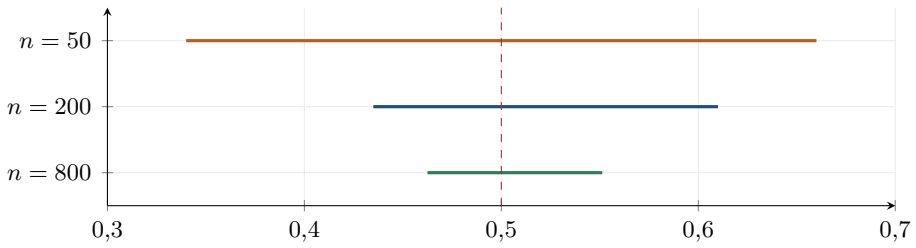
On appelle **fluctuation d'échantillonnage** la variation de la fréquence observée d'un échantillon à l'autre, pour des échantillons de même taille tirés dans les mêmes conditions.

Une simulation

On a simulé 40 échantillons de lancers d'une pièce équilibrée, pour trois tailles n, et calculé la fréquence de « face » de chaque échantillon :

Taille n	Plus petite fréquence	Plus grande	Moyenne	Écart type
50	0,34	0,66	0,507	0,076
200	0,435	0,61	0,514	0,038
800	0,463	0,551	0,503	0,021

Plus l'échantillon est grand, plus les fréquences se resserrent autour de $p = 0{,}5$: quand la taille est multipliée par 4, l'écart type est à peu près divisé par 2.



Étendue des 40 fréquences observées selon la taille des échantillons ; en pointillé, la probabilité 0,5.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3. Loi des grands nombres

Version vulgarisée

Lorsqu'on répète un grand nombre n de fois une même expérience aléatoire, de façon indépendante, la fréquence observée d'un événement est, **sauf exception**, proche de sa probabilité.

Ce que la loi ne dit pas

— Elle ne dit rien d'un **petit** échantillon : 7 « six » sur 20 lancers ne prouvent pas qu'un dé est truqué.

— Elle ne dit pas que la fréquence finit par être **égale** à la probabilité.

— Le hasard ne « compense » pas : après cinq « pile », « face » n'est pas plus probable ; une pièce n'a pas de mémoire.

4. Estimer une probabilité

Construire un modèle à partir de l'expérience

Quand aucune symétrie ne permet de supposer l'équiprobabilité, on répète l'expérience un grand nombre de fois et l'on prend la fréquence observée comme valeur approchée de la probabilité.

— Une punaise lancée 1 000 fois retombe 612 fois pointe en haut : on choisit le modèle $p \approx 0{,}61$.

— Il naît environ 105 garçons pour 100 filles : la probabilité qu'un nouveau-né soit un garçon est d'environ $\frac{105}{205} \approx 0{,}512$.

Prévoir

Si un événement a la probabilité p, on peut s'attendre, sur N répétitions, à **environ** $N \times p$ réalisations, le nombre exact fluctuant.

Un échantillon doit être tiré au hasard

La loi des grands nombres ne vaut que pour un échantillon tiré au hasard. Interroger 800 personnes à la sortie d'une salle de sport ne renseigne pas sur la pratique sportive de toute une ville : la taille ne corrige pas un **biais**.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

5. Simuler avec Python et le tableur

Instructions utiles

Outil	Instruction	Rôle
Python	`random()`	un décimal au hasard dans $[0\,;1[$
Python	`random() < p`	condition vraie avec la probabilité p
Python	`randint(1, 6)`	un entier de 1 à 6
Tableur	`=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)`	un lancer de dé
Tableur	`=NB.SI(A1:A500;6)`	compte les « 6 »

Fréquence de « face » sur n lancers

```
from random import random

def frequence_face(n):
    succes = 0
    for i in range(n):
        if random() < 0.5:
            succes = succes + 1
    return succes / n
```

Chaque appel renvoie une fréquence différente. En appelant cette fonction un grand nombre de fois, on obtient une **série statistique de fréquences**, dont on calcule la moyenne et l'écart type pour mesurer la fluctuation.

Moyenne et écart type d'une série simulée, sans liste

```
from math import sqrt

def fluctuation(n, nb_echantillons):
    s = 0
    s2 = 0
    for k in range(nb_echantillons):
        f = frequence_face(n)
        s = s + f
        s2 = s2 + f * f
    m = s / nb_echantillons
    return m, sqrt(s2 / nb_echantillons - m * m)
```

Les variables `s` et `s2` accumulent les fréquences et leurs carrés ; on utilise la formule de l'écart type $\sigma = \sqrt{\overline{f^2} - \bar{f}^2}$.

Méthode de Monte-Carlo

On tire au hasard des points dans le carré $[0\,;1] \times [0\,;1]$; la fréquence des points tels que $x^2 + y^2 \leq 1$ (quart de disque) est proche de $\frac{\pi}{4}$ quand le nombre de points est grand. Avec 100 000 points, on retrouve $\pi \approx 3{,}14$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

6. Erreurs classiques

À éviter

- Conclure sur un petit échantillon.
- Croire que le hasard compense les écarts.
- Confondre fréquence (mesurée, variable) et probabilité (fixée par le modèle).
- Faire confiance à un grand échantillon biaisé.

7. Fiche de synthèse

Fréquence	$f = \frac{k}{n}$; change d'un échantillon à l'autre (fluctuation)
Taille	plus n est grand, moins les fréquences sont dispersées ; $n \times 4$: écart type environ $\div 2$
Loi des grands nombres	n grand : sauf exception, f proche de p
Estimer	prendre la fréquence observée sur un grand nombre d'essais
Prévoir	environ $N \times p$ réalisations sur N essais
Biais	un échantillon doit être tiré au hasard

8. Exercices d'application

Exercice 1 – Fréquences

Sur 250 lancers d'un dé, on a obtenu 48 « six ». Calculer la fréquence observée et la comparer à la probabilité si le dé est équilibré.

Exercice 2 – Interpréter

Deux sondages de 1 000 personnes, réalisés le même jour, donnent 52 % et 49 % d'opinions favorables. Est-ce contradictoire ?

Exercice 3 – Estimer et prévoir

Une machine produit des pièces ; sur 5 000 pièces contrôlées, 135 sont défectueuses. Estimer la probabilité qu'une pièce soit défectueuse, puis le nombre de pièces défectueuses attendu sur une production de 20 000 pièces.

Exercice 4 – Programme

Écrire une fonction Python `frequence_six(n)` qui simule n lancers d'un dé équilibré et renvoie la fréquence des « six ». Autour de quelle valeur ses résultats se placent-ils pour $n = 100\,000$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

9. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $f = \dfrac{48}{250} = 0{,}192$. La probabilité est $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$: l'écart (environ 2,5 points) est d'un ordre normal pour 250 lancers et ne suffit pas à conclure que le dé est truqué.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. Non : chaque sondage interroge un échantillon différent ; un écart de 3 points entre deux échantillons de 1 000 personnes s'explique par la fluctuation d'échantillonnage.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $p \approx \dfrac{135}{5\,000} = 0{,}027$. Sur 20 000 pièces, on peut s'attendre à environ $20\,000 \times 0{,}027 = 540$ pièces défectueuses.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé.

```
from random import randint

def frequence_six(n):
    compteur = 0
    for i in range(n):
        if randint(1, 6) == 6:
            compteur = compteur + 1
    return compteur / n
```

D'après la loi des grands nombres, pour $n = 100\,000$ les résultats sont très proches de $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).