

Plaquette 2 – Étude de signe et inéquations

Équations et inéquations du second degré – Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le signe d'une expression du premier degré $ax + b$ (avec $a \neq 0$), qui s'annule en $x = -\frac{b}{a}$:

Cas	avant la racine	après la racine
$a > 0$	signe –	signe +
$a < 0$	signe +	signe –

Un moyen mnémotechnique : l'expression est **du signe de a après sa racine**.

Le signe d'un produit. On multiplie les signes colonne par colonne :

$$(+)\times(+)=(+) \quad (+)\times(-)=(-) \quad (-)\times(-)=(+)$$

Le signe d'un quotient. Mêmes règles que pour le produit, avec une réserve capitale :

une valeur qui annule le dénominateur est **exclue** de l'ensemble des solutions

même si l'inégalité est **large** ($\leq$ ou $\geq$). On la marque d'une double barre dans le tableau.

La démarche pour une inéquation.

- **1.** Tout ramener dans le **même membre** : « expression ≤ 0 ».
- **2. Factoriser** l'expression (facteur commun, identité remarquable, ou factorisation fournie).
- **3.** Dresser le **tableau de signes** : une ligne par facteur, une ligne pour le produit.
- **4.** Lire les intervalles où le signe convient, en soignant les **crochets** : fermés pour une inégalité large sur une racine du numérateur, **toujours ouverts** sur une valeur interdite.

⚠ **Ne jamais multiplier une inéquation par une expression contenant x :** son signe est inconnu, et le sens de l'inégalité en dépend.

Correction de l'exercice 1 – Le signe d'une expression du premier degré

Pour chaque expression, on cherche sa **racine**, puis on applique la règle « du signe de a après la racine ».

Pour $A = 2x - 6$: elle s'annule pour $2x = 6$, soit $x = 3$. Le coefficient $a = 2$ est **positif**, donc A est négative avant 3 et positive après.

Intervalle	$] -\infty ; 3[$	$] 3 ; +\infty [$
Signe de $2x - 6$	–	+

Pour $B = -3x + 9$: elle s'annule pour $-3x = -9$, soit $x = 3$ également. Mais le coefficient $a = -3$ est **négatif**, donc les signes sont inversés.

Intervalle	$] -\infty ; 3[$	$] 3 ; +\infty[$
Signe de $-3x + 9$	+	-

Pour $C = 5x + 2$: elle s'annule pour $x = -\frac{2}{5} = -0,4$, et $a = 5 > 0$.

Intervalle	$] -\infty ; -0,4[$	$] -0,4 ; +\infty[$
Signe de $5x + 2$	-	+

Le contrôle par un point test. Pour A , prenons $x = 0$: $A = -6 < 0$ ✓ cohérent avec la colonne de gauche. Pour B , $x = 0$ donne $B = 9 > 0$ ✓ Ce test d'une seconde valide tout le tableau.

Pourquoi A et B ont la même racine. Parce que $B = -\frac{3}{2}A$: les deux expressions sont proportionnelles, avec un coefficient négatif. Elles s'annulent donc au même endroit, avec des signes **opposés** partout ailleurs.

L'erreur classique. Oublier de regarder le signe de a et écrire mécaniquement « - puis + ». Pour B , cela donnerait exactement l'inverse de la réalité.

Réponse. A : négative avant 3, positive après — B : positive avant 3, négative après — C : négative avant $-0,4$, positive après.

Correction de l'exercice 2 - Le signe d'un produit

a) Le facteur $x - 1$ s'annule pour $x = 1$; le facteur $x + 4$ s'annule pour $x = -4$.

Les deux racines, rangées dans l'ordre croissant, découpent l'axe en trois intervalles : $] -\infty ; -4[$, $] -4 ; 1[$ et $] 1 ; +\infty[$.

b) Chaque facteur a un coefficient de x **positif** : il est donc négatif avant sa racine, positif après.

Intervalle	$] -\infty ; -4[$	$] -4 ; 1[$	$] 1 ; +\infty[$
Signe de $x - 1$	-	-	+
Signe de $x + 4$	-	+	+
Signe de $P(x)$	+	-	+

Le produit s'annule en $x = -4$ et en $x = 1$.

c) On cherche les intervalles où $P(x)$ est **positive ou nulle**. Les racines sont **incluses**, l'inégalité étant large :

$$S =] -\infty ; -4] \cup [1 ; +\infty[$$

Le contrôle par trois points tests. $x = -5$: $(-6)(-1) = 6 > 0$ ✓ ; $x = 0$: $(-1)(4) = -4 < 0$ ✓ ; $x = 2$: $(1)(6) = 6 > 0$ ✓ Un point par intervalle suffit à valider tout le tableau.

La règle des signes d'un produit de deux facteurs du premier degré. Le signe est **positif à l'extérieur** des racines et **négatif entre elles**, quand les deux coefficients de x sont positifs. C'est la forme classique, à reconnaître d'un coup d'œil.

Le soin des crochets. L'inégalité $\geq$ inclut le cas $P(x) = 0$, donc -4 et 1 appartiennent aux solutions : crochets **fermés**. Avec $>$ strict, ils seraient ouverts.

Réponse. a) 1 et -4 — b) positif, négatif, positif — c) $S =] -\infty ; -4] \cup [1 ; +\infty[$.

Correction de l'exercice 3 – Un facteur décroissant

On cherche les racines de chaque facteur.

$$2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} = -1,5 \quad 5 - x = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Attention au second facteur : dans $5 - x$, le coefficient de x vaut -1 , donc il est **négatif**. Ce facteur est positif avant 5 et négatif après.

Intervalle	$] -\infty ; -1,5[$	$] -1,5 ; 5[$	$] 5 ; +\infty[$
Signe de $2x + 3$	–	+	+
Signe de $5 - x$	+	+	–
Signe du produit	–	+	–

On cherche où le produit est **strictement négatif**. Les racines sont exclues (inégalité stricte) :

$$S =]-\infty ; -1,5[\cup]5 ; +\infty[$$

Le contrôle par trois points tests. $x = -2 : (-1)(7) = -7 < 0 \checkmark$; $x = 0 : (3)(5) = 15 > 0 \checkmark$; $x = 6 : (15)(-1) = -15 < 0 \checkmark$

Le piège de cet exercice. Traiter $5 - x$ comme $x - 5$ et écrire « – puis + » : tout le tableau serait alors inversé, et la réponse exactement complémentaire de la bonne.

Comment l'éviter. On peut réécrire le facteur sous la forme habituelle : $5 - x = -(x - 5)$. Le signe moins devant rappelle que le facteur change de sens, et l'on peut aussi le sortir du produit :

$$(2x + 3)(5 - x) = -(2x + 3)(x - 5)$$

Le repère visuel. Avec un facteur croissant et un facteur décroissant, le produit est **négatif à l'extérieur** et positif entre les racines — l'inverse de l'exercice précédent.

Réponse. $S =]-\infty ; -1,5[\cup]5 ; +\infty[$.

Correction de l'exercice 4 – Le signe de $x^2 - 9$

a) On reconnaît une différence de carrés :

$$Q(x) = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$$

b) Les racines sont 3 et -3 , et les deux facteurs ont un coefficient de x positif.

Intervalle	$] -\infty ; -3[$	$] -3 ; 3[$	$] 3 ; +\infty[$
Signe de $x - 3$	–	–	+
Signe de $x + 3$	–	+	+
Signe de $Q(x)$	+	–	+

c) L'inéquation $x^2 \leq 9$ équivaut à $Q(x) \leq 0$, c'est-à-dire aux intervalles où le produit est négatif ou nul :

$$S = [-3 ; 3]$$

L'inéquation $x^2 > 9$ équivaut à $Q(x) > 0$, avec des racines **exclues** :

$$S =]-\infty ; -3[\cup]3 ; +\infty[$$

Les deux formes à mémoriser. Une inéquation $x^2 \leq k$ (avec $k > 0$) donne **un intervalle centré en 0** ; une inéquation $x^2 \geq k$ donne une **réunion de deux intervalles**. Une

réponse d'une seule pièce à $x^2 > 9$ est nécessairement incomplète.

La vérification par le tableau. Les deux ensembles sont **complémentaires** l'un de l'autre, aux racines près. C'est toujours le cas quand on passe de $\leq$ à $>$: un contrôle gratuit.

Le contrôle par points tests. $x = 0 : 0 \leq 9 \checkmark$ et $0 \in [-3; 3] \checkmark$; $x = 4 : 16 > 9 \checkmark$ et 4 est bien dans la réunion $\checkmark$

L'erreur à éviter. Écrire $x^2 > 9 \Leftrightarrow x > 3$, en oubliant toute la partie négative. Le tableau de signes protège de cet oubli, à condition de le lire jusqu'au bout.

Réponse. a) $Q(x) = (x - 3)(x + 3)$ — b) positif, négatif, positif — c) $S = [-3; 3]$ puis $S =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$.

Correction de l'exercice 5 - Une inéquation avec facteur commun

△ **On ne divise pas par x** : son signe est inconnu, et la division par un nombre négatif inverserait l'inégalité. On ramène tout d'un côté, puis on factorise.

$$x^2 > 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x > 0 \Leftrightarrow x(x - 4) > 0$$

Les racines sont 0 et 4.

Intervalle	$] -\infty ; 0[$	$] 0 ; 4[$	$] 4 ; +\infty[$
Signe de x	—	+	+
Signe de $x - 4$	—	—	+
Signe du produit	+	—	+

On cherche où le produit est **strictement positif** :

$$S =]-\infty; 0[\cup]4; +\infty[$$

Le contrôle par trois points tests. $x = -1 : 1 > -4 \checkmark$; $x = 2 : 4 > 8$ est **faux** $\checkmark$; $x = 5 : 25 > 20 \checkmark$

Ce que donnerait la division par x . On obtiendrait « $x > 4$ », ce qui oublie **tous les négatifs** — alors qu'ils conviennent tous, puisque x^2 y est positif et $4x$ négatif. La moitié des solutions serait perdue.

Le cas $x = 0$. Il est exclu, puisque $0 > 0$ est faux. Avec une inégalité large $\geq$, il aurait été inclus, et l'ensemble serait $] -\infty ; 0] \cup [4 ; +\infty[$.

Le réflexe général. Toute inéquation où x^2 et x coexistent se traite ainsi : membre unique, factorisation, tableau. Cette méthode ne se trompe jamais, contrairement aux manipulations directes.

Réponse. $S =]-\infty; 0[\cup]4; +\infty[$.

Correction de l'exercice 6 - Le signe d'un quotient

a) Le dénominateur s'annule pour $x + 3 = 0$, soit $x = -3$. C'est la **valeur interdite** : R est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

b) Le numérateur s'annule en 2, le dénominateur en -3 . Les règles de signes sont les mêmes que pour un produit.

Intervalle	$] -\infty ; -3[$	$] -3 ; 2[$	$] 2 ; +\infty[$
Signe de $x - 2$	–	–	+
Signe de $x + 3$	–	+	+
Signe de $R(x)$	+	–	+

En $x = -3$, on place une **double barre** : la fonction n'y est pas définie. En $x = 2$, le quotient s'**annule**.

c) On cherche où $R(x)$ est négative ou nulle. C'est l'intervalle du milieu, avec deux traitements différents aux bornes :

- $x = 2$ **annule** le quotient, et l'inégalité est large : cette valeur est **incluse** ;
- $x = -3$ est la valeur interdite : elle est **exclue**, quoi qu'il arrive.

$$S =]-3 ; 2]$$

Le contrôle par trois points tests. $x = -4 : \frac{-6}{-1} = 6 > 0 \checkmark$; $x = 0 : \frac{-2}{3} \approx -0,67 < 0 \checkmark$;
 $x = 3 : \frac{1}{6} > 0 \checkmark$

L'asymétrie des crochets. C'est le point le plus souvent manqué : dans une même réponse, un crochet fermé du côté du **numérateur** et un crochet ouvert du côté du **dénominateur**. Les deux bornes ne jouent pas le même rôle.

Pourquoi le tableau est identique à celui d'un produit. Un quotient a le même signe que le produit de son numérateur par son dénominateur : $\frac{a}{b}$ et $a \times b$ sont de même signe. Seule change la valeur interdite.

Réponse. a) $x = -3$ — b) positif, négatif, positif, avec une double barre en -3 — c) $S =]-3 ; 2]$.

Correction de l'exercice 7 - Trois facteurs

Les trois facteurs s'annulent respectivement en 0, 2 et -5 . Rangées dans l'ordre croissant, ces racines découpent l'axe en quatre intervalles.

Intervalle	$] -\infty ; -5[$	$] -5 ; 0[$	$] 0 ; 2[$	$] 2 ; +\infty[$
Signe de x	–	–	+	+
Signe de $x - 2$	–	–	–	+
Signe de $x + 5$	–	+	+	+
Signe du produit	–	+	–	+

On cherche où le produit est **négatif ou nul**. Les trois racines sont **incluses**, l'inégalité étant large :

$$S =]-\infty ; -5] \cup [0 ; 2]$$

Le contrôle par quatre points tests. $x = -6 : (-6)(-8)(-1) = -48 < 0 \checkmark$; $x = -1 : (-1)(-3)(4) = 12 > 0 \checkmark$; $x = 1 : (1)(-1)(6) = -6 < 0 \checkmark$; $x = 3 : (3)(1)(8) = 24 > 0 \checkmark$

La règle de l'alternance. Quand tous les facteurs ont un coefficient de x **positif**, les signes **alternent** d'un intervalle à l'autre, en partant du signe de $(-1)^n$ à gauche (n étant le nombre de facteurs). Ici $n = 3$, donc on démarre par un $-$.

L'ordre des racines. Elles doivent être rangées **dans l'ordre croissant** en haut du tableau : -5 , puis 0 , puis 2 . Les écrire dans l'ordre où elles apparaissent dans l'expression est l'erreur la plus fréquente sur ce type de question.

La forme de la réponse. Deux morceaux, dont l'un est fermé des deux côtés : les

crochets se décident racine par racine, jamais globalement.

Réponse. $S =]-\infty; -5] \cup [0; 2]$.

Correction de l'exercice 8 - Une inéquation avec factorisation fournie

a) On développe le produit :

$$(x - 1)(x + 3) = x^2 + 3x - x - 3 = x^2 + 2x - 3 \quad \checkmark$$

b) On ramène tout dans le même membre, puis on remplace par la forme factorisée :

$$x^2 + 2x \leq 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 3) \leq 0$$

Les racines sont 1 et -3.

Intervalle	$]-\infty; -3[$	$] -3; 1[$	$]1; +\infty[$
Signe de $x - 1$	-	-	+
Signe de $x + 3$	-	+	+
Signe du produit	+	-	+

On cherche où le produit est **négatif ou nul**, racines incluses :

$$S = [-3; 1]$$

Le contrôle par trois points tests. $x = -4 : 16 - 8 = 8 \leq 3$ est **faux** $\checkmark$; $x = 0 : 0 \leq 3$ $\checkmark$; $x = 2 : 4 + 4 = 8 \leq 3$ est **faux** $\checkmark$

Pourquoi la factorisation est fournie. En Seconde, on ne dispose pas du discriminant : sans indication, on ne saurait pas factoriser $x^2 + 2x - 3$. L'énoncé la donne, et la première question consiste toujours à la **vérifier** par développement — elle n'est jamais admise sans contrôle.

Le contrôle rapide d'une factorisation. Dans $(x - 1)(x + 3)$, la somme des racines vaut $1 + (-3) = -2$, soit l'opposé du coefficient de x $\checkmark$ et leur produit vaut -3 , soit le terme constant $\checkmark$

L'étape à ne pas sauter. Tout ramener du même côté **avant** de factoriser. Travailler sur $x^2 + 2x \leq 3$ directement, sans passer par ≤ 0 , rend le tableau de signes inutilisable.

Réponse. a) le développement donne $x^2 + 2x - 3$ $\checkmark$ — b) $S = [-3; 1]$.

Correction de l'exercice 9 - Comparer deux expressions

a) On développe :

$$(x - 4)(x + 1) = x^2 + x - 4x - 4 = x^2 - 3x - 4 \quad \checkmark$$

b) On calcule la différence :

$$A - B = x^2 - (3x + 4) = x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$$

Les racines sont 4 et -1.

Intervalle	$]-\infty; -1[$	$] -1; 4[$	$]4; +\infty[$
Signe de $x - 4$	-	-	+
Signe de $x + 1$	-	+	+
Signe de $A - B$	+	-	+

c) On traduit chaque signe en comparaison :

— sur $]-\infty; -1[$ et $]4; +\infty[: A - B > 0$, donc $x^2 > 3x + 4$;

- sur $] -1 ; 4[$: $A - B < 0$, donc $x^2 < 3x + 4$;
- pour $x = -1$ et $x = 4$: $A = B$.

Le contrôle sur trois valeurs. $x = -2 : 4 > -2$ ✓ ; $x = 0 : 0 < 4$ ✓ ; $x = 5 : 25 > 19$ ✓

La méthode universelle de comparaison. Pour comparer deux expressions, on étudie le **signe de leur différence**. C'est plus sûr que de manipuler l'inégalité, surtout quand l'inconnue figure des deux côtés.

L'interprétation graphique. Les valeurs -1 et 4 sont les abscisses des points d'intersection de la parabole $y = x^2$ et de la droite $y = 3x + 4$. Entre elles, la droite est au-dessus ; à l'extérieur, c'est la parabole.

Le contrôle de la factorisation. Somme des racines : $4 + (-1) = 3$, soit l'opposé du coefficient de x (-3) ✓ Produit : $4 \times (-1) = -4$, soit le terme constant ✓

Réponse. a) le développement confirme — b) positif à l'extérieur de $[-1 ; 4]$, négatif entre — c) $x^2 > 3x + 4$ hors de $[-1 ; 4]$, $x^2 < 3x + 4$ entre, égalité en -1 et 4 .

Correction de l'exercice 10 - Lire un signe sur une courbe

a) La courbe coupe l'axe des abscisses en $A(-1 ; 0)$ et $B(3 ; 0)$: les racines de f sont -1 et 3 .

b) L'inéquation $f(x) < 0$ demande où la courbe est **strictement en dessous** de l'axe des abscisses. C'est le cas **entre** les deux racines :

$$S =]-1 ; 3[$$

L'inéquation $f(x) \geq 0$ demande où la courbe est **au-dessus ou sur** l'axe, racines comprises :

$$S =]-\infty ; -1] \cup [3 ; +\infty[$$

c) On développe la factorisation proposée :

$$(x - 3)(x + 1) = x^2 + x - 3x - 3 = x^2 - 2x - 3 \quad \checkmark$$

Intervalle	$] -\infty ; -1[$	$] -1 ; 3[$	$] 3 ; +\infty[$
Signe de $x - 3$	-	-	+
Signe de $x + 1$	-	+	+
Signe de $f(x)$	+	-	+

Le tableau donne exactement les mêmes ensembles que la lecture graphique ✓

La correspondance à retenir. « Signe de $f(x)$ » et « position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses » sont **la même information**, dite de deux façons. Un tableau de signes est la version calculatoire d'un dessin.

Le repère visuel des paraboles. Une parabole tournée vers le haut est **négative entre ses racines** et positive à l'extérieur. Elle est positive partout si elle ne coupe pas l'axe.

Le contrôle par le sommet. Ici le minimum se lit vers $(1 ; -4)$, et le calcul confirme : $f(1) = 1 - 2 - 3 = -4$ ✓ Il est bien situé dans la zone négative, à mi-chemin des deux racines.

Réponse. a) -1 et 3 — b) $S =]-1 ; 3[$ puis $S =]-\infty ; -1] \cup [3 ; +\infty[$ — c) le tableau de signes redonne les mêmes ensembles.

Correction de l'exercice 11 - Une inéquation quotient

La valeur interdite est celle qui annule le dénominateur : $x + 1 = 0$, soit $x = -1$.

Le numérateur $3 - x$ s'annule en 3, et son coefficient de x vaut -1 , donc il est **positif avant** 3 et négatif après.

Intervalle	$] -\infty ; -1[$	$] -1 ; 3[$	$] 3 ; +\infty[$
Signe de $3 - x$	+	+	–
Signe de $x + 1$	–	+	+
Signe du quotient	–	+	–

On cherche où le quotient est **positif ou nul** :

- l'intervalle du milieu convient ;
- $x = 3$ annule le quotient et l'inégalité est large : **inclus** ;
- $x = -1$ est la valeur interdite : **exclu**.

$$S =]-1 ; 3]$$

Le contrôle par trois points tests. $x = -2 : \frac{5}{-1} = -5 < 0 \checkmark$; $x = 0 : \frac{3}{1} = 3 > 0 \checkmark$; $x = 4 : \frac{-1}{5} = -0,2 < 0 \checkmark$

Les deux pièges réunis. Un numérateur **décroissant** ($3 - x$), qui inverse la lecture habituelle, et une **valeur interdite** qui impose un crochet ouvert. Chacun pris séparément est simple ; c'est leur rencontre qui fait la difficulté.

Pourquoi il ne faut pas multiplier par $x + 1$. Son signe change selon x : la multiplication conserverait le sens de l'inégalité à droite de -1 et l'inverserait à gauche. Le tableau de signes évite entièrement ce raisonnement à deux cas.

La lecture du résultat. L'ensemble obtenu est un intervalle « mixte » : ouvert à gauche, fermé à droite. Cette asymétrie est le signe qu'on a bien distingué racine du numérateur et valeur interdite.

Réponse. $S =]-1 ; 3]$.

Correction de l'exercice 12 - Signe et valeurs interdites

a) Le dénominateur s'annule pour $x = 1$, d'où

$$D_T = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

b) Le numérateur est une différence de carrés :

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

Les valeurs qui interviennent sont donc -2 , 1 et 2 , à ranger dans l'ordre croissant.

Intervalle	$] -\infty ; -2[$	$] -2 ; 1[$	$] 1 ; 2[$	$] 2 ; +\infty[$
Signe de $x - 2$	–	–	–	+
Signe de $x + 2$	–	+	+	+
Signe de $x - 1$	–	–	+	+
Signe de $T(x)$	–	+	–	+

c) On cherche où $T(x)$ est **strictement positive** :

$$S =]-2 ; 1[\cup]2 ; +\infty[$$

Les trois valeurs -2 , 1 et 2 sont exclues : les deux premières parce que l'inégalité est stricte et que T s'y annule ou n'y est pas définie, la dernière parce que $T(2) = 0$.

Le contrôle par quatre points tests. $x = -3 : \frac{5}{-4} < 0 \checkmark$; $x = 0 : \frac{-4}{-1} = 4 > 0 \checkmark$; $x = 1,5 :$

$$\frac{-1,75}{0,5} < 0 \checkmark ; x = 3 : \frac{5}{2} > 0 \checkmark$$

La difficulté de cet exercice. Trois lignes de signes au lieu de deux, et surtout **l'intercalage** de la valeur interdite 1 entre les deux racines du numérateur. Ranger les trois valeurs dans l'ordre croissant est l'étape décisive.

La lecture de la ligne de conclusion. On multiplie les trois signes de chaque colonne : trois – donnent – ; deux – et un + donnent +. C'est la règle des signes, appliquée trois fois.

Le cas de $x = 2$. Le numérateur s'y annule, donc $T(2) = 0$. Avec une inégalité **large** $\geq$, cette valeur aurait été **incluse**, contrairement à $x = 1$ qui reste exclue en toutes circonstances.

Réponse. a) $D_T = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ — b) négatif, positif, négatif, positif — c) $S =]-2; 1[\cup]2; +\infty[$.

Correction de l'exercice 13 - Une erreur de méthode

a) Pour $x = -1$:

$$\frac{1}{-1} = -1 \quad \text{et} \quad -1 < 2 \checkmark$$

La valeur -1 **vérifie** l'inéquation, alors qu'elle n'appartient pas à la réponse de l'élève. Sa solution est donc incomplète.

b) **L'erreur** : il a multiplié par x sans connaître son **signe**. Multiplier une inégalité par un nombre négatif en **inverse** le sens ; l'élève a conservé le sens dans tous les cas.

c) On ramène tout d'un côté et on réduit au même dénominateur :

$$\frac{1}{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 2x}{x} < 0$$

Le numérateur $1 - 2x$ s'annule en $x = 0,5$ et a un coefficient **négatif** ; le dénominateur s'annule en 0 (valeur interdite).

Intervalle	$] -\infty ; 0[$	$] 0 ; 0,5[$	$] 0,5 ; +\infty[$
Signe de $1 - 2x$	+	+	–
Signe de x	–	+	+
Signe du quotient	–	+	–

On cherche où le quotient est **strictement négatif** :

$$S =]-\infty ; 0[\cup]0,5 ; +\infty[$$

Le contrôle par trois points tests. $x = -1$: $-1 < 2 \checkmark$; $x = 0,25$: $4 < 2$ est **faux** $\checkmark$; $x = 1$: $1 < 2 \checkmark$

Ce que l'élève a perdu. Tous les nombres négatifs, pour lesquels $\frac{1}{x}$ est négatif et donc automatiquement inférieur à 2. C'est la moitié des solutions.

La méthode sûre. Face à une inéquation avec l'inconnue au **dénominateur** : tout ramener d'un côté, réduire au même dénominateur, factoriser, tableau de signes. On ne multiplie jamais par une quantité de signe inconnu.

Réponse. a) -1 vérifie l'inéquation mais n'est pas dans sa réponse — b) il a multiplié par x sans connaître son signe — c) $S =]-\infty ; 0[\cup]0,5 ; +\infty[$.

Correction de l'exercice 14 - Positive partout ?

a) Pour tout réel x , on sait que $x^2 \geq 0$. En ajoutant 1 aux deux membres :

$$x^2 + 1 \geq 1 > 0$$

L'expression est donc **strictement positive** pour tout x , et ne s'annule jamais.

b) $(x - 3)^2$ est un carré, donc positif ou nul. L'égalité $(x - 3)^2 = 0$ a lieu uniquement pour $x - 3 = 0$, c'est-à-dire pour

$$x = 3$$

c) On vérifie d'abord la forme donnée :

$$(x - 3)^2 + 1 = x^2 - 6x + 9 + 1 = x^2 - 6x + 10 \quad \checkmark$$

Comme $(x - 3)^2 \geq 0$, on obtient en ajoutant 1 :

$$x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1 \geq 1 > 0$$

L'expression est donc **strictement positive pour tout réel** x . Son minimum vaut 1, atteint en $x = 3$.

L'inéquation $x^2 - 6x + 10 < 0$ n'a par conséquent **aucune** solution :

$$S = \emptyset$$

Pourquoi aucun tableau de signes n'est nécessaire. L'expression ne s'annule jamais : il n'y a aucune racine, donc rien à découper. Vouloir la factoriser serait une perte de temps — elle ne se factorise pas.

Comment reconnaître ce cas. Quand l'énoncé fournit une forme $(x - a)^2 + k$ avec $k > 0$, l'expression est **toujours positive**. Avec $(x - a)^2 - k$ et $k > 0$, elle change de signe deux fois ; avec $k = 0$, elle ne s'annule qu'en un point.

L'interprétation graphique. La parabole de $x^2 - 6x + 10$ a son sommet en $(3 ; 1)$ et est tournée vers le haut : elle reste **entièrement au-dessus** de l'axe des abscisses, qu'elle ne coupe donc jamais.

Réponse. a) $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ — b) c'est un carré, nul uniquement en $x = 3$ — c) l'expression vaut au minimum 1, donc $S = \emptyset$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : six inéquations

a) Racines -1 et 5 , deux facteurs croissants : le produit est **positif à l'extérieur**.

$$S =]-\infty ; -1[\cup]5 ; +\infty[$$

b) $x^2 \leq 49 \Leftrightarrow x^2 - 49 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 7)(x + 7) \leq 0$, donc un intervalle centré :

$$S = [-7 ; 7]$$

c) Facteur commun : $x^2 + 3x = x(x + 3) \geq 0$. Racines -3 et 0 , produit positif à l'extérieur, racines incluses :

$$S =]-\infty ; -3] \cup [0 ; +\infty[$$

d) Valeur interdite -2 , racine du numérateur 4 . Le quotient est positif à l'extérieur de $[-2 ; 4]$:

$$S =]-\infty ; -2[\cup [4 ; +\infty[$$

Crochet **ouvert** en -2 (valeur interdite), **fermé** en 4 (racine du numérateur et inégalité large).

e) Avec la factorisation fournie : $(x - 3)(x + 2) < 0$, donc l'intervalle **entre** les racines, bornes exclues :

$$S =]-2 ; 3[$$

Contrôle : $x = 0$ donne $-6 < 0 \quad \checkmark$; $x = 4$ donne $16 - 4 - 6 = 6 < 0$, **faux** $\checkmark$

f) $x^2 + 4 < 0$ équivaut à $x^2 < -4$. Un carré n'est jamais négatif :

$$S = \emptyset$$

Le bilan des formes de réponse. Un produit ou un quotient de deux facteurs du premier degré donne soit **un intervalle** (signe négatif), soit **une réunion de deux** (signe positif) — sauf quand l’expression ne s’annule jamais, auquel cas la réponse est $\mathbb{R}$ ou $\emptyset$.

Le point de vigilance des crochets. En d), les deux bornes ne se traitent pas de la même façon : c’est la question la plus discriminante de cette plaquette.

La démarche, une dernière fois. Membre unique, factorisation, tableau de signes, lecture soignée des crochets — puis un **point test par intervalle** pour valider.

Réponse. a) $] -\infty ; -1[\cup] 5 ; +\infty[$ — b) $[-7 ; 7]$ — c) $] -\infty ; -3] \cup [0 ; +\infty[$ — d) $] -\infty ; -2[\cup [4 ; +\infty[$ — e) $] -2 ; 3[$ — f) $\emptyset$.