

Plaque 1 – Factorisation et équations

Équations et inéquations du second degré – Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les trois identités remarquables, à connaître dans les deux sens :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

La règle du produit nul, le cœur de la méthode :

$$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

⚠ Elle ne vaut que pour un produit **égal à zéro** : de $A \times B = 6$ on ne peut rien déduire sur A et B séparément.

Les deux équations modèles.

$$X^2 = k \Leftrightarrow \begin{cases} X = \sqrt{k} \text{ ou } X = -\sqrt{k} & \text{si } k > 0 \\ X = 0 & \text{si } k = 0 \\ \text{aucune solution} & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

$$A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = B \text{ ou } A = -B$$

La démarche, dans l'ordre.

- **1.** Tout ramener dans le **même membre**, pour obtenir « expression = 0 ».
- **2. Factoriser** : facteur commun d'abord, puis identité remarquable.
- **3.** Appliquer la **règle du produit nul**.
- **4.** Résoudre chaque équation du premier degré et **vérifier** les solutions.

⚠ **Ne jamais diviser par une expression contenant x** : on perdrait les solutions qui l'annulent. On factorise à la place.

Correction de l'exercice 1 – Quatre équations directes

On discute le **signe du second membre** après avoir isolé x^2 .

Pour $x^2 = 36$: le second membre est positif, il y a deux solutions opposées.

$$x = \sqrt{36} = 6 \text{ ou } x = -6 \quad S = \{-6; 6\}$$

Pour $x^2 = 5$: positif également, mais 5 n'est pas un carré parfait.

$$S = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\} \quad \text{avec } \sqrt{5} \approx 2,24$$

Pour $x^2 = -1$: un carré est toujours positif ou nul, donc

$$S = \emptyset$$

Pour $3x^2 = 12$: on isole d'abord x^2 en divisant par 3, ce qui est licite puisque 3 est un nombre non nul.

$$3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2 \quad S = \{-2; 2\}$$

Contrôle : $3 \times 2^2 = 12 \checkmark$ et $3 \times (-2)^2 = 12 \checkmark$

L'erreur la plus fréquente. Ne donner qu'une solution. Une équation $x^2 = k$ avec $k > 0$ en a **toujours deux**, opposées l'une de l'autre.

La seconde erreur fréquente. Écrire $x = \sqrt{-1}$ pour la troisième équation. Le symbole $\sqrt{}$ n'a de sens que pour un nombre positif ou nul : il n'y a rien à écrire, l'ensemble des solutions est **vide**.

Le réflexe d'écriture. Les solutions exactes s'écrivent avec le radical ($\sqrt{5}$) ; la valeur décimale 2,24 n'est qu'une approximation, à ne donner que si l'énoncé le demande.

Réponse. $S = \{-6; 6\}$; $S = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$; $S = \emptyset$; $S = \{-2; 2\}$.

Correction de l'exercice 2 - Des carrés décalés

Le raisonnement est le même que pour $x^2 = k$, appliqué à la quantité entre parenthèses.

a) $(x - 2)^2 = 9$ donne $x - 2 = 3$ ou $x - 2 = -3$:

$$x = 5 \quad \text{ou} \quad x = -1 \quad S = \{-1; 5\}$$

Contrôle : $(5 - 2)^2 = 9 \checkmark$ et $(-1 - 2)^2 = (-3)^2 = 9 \checkmark$

b) $(2x + 1)^2 = 4$ donne $2x + 1 = 2$ ou $2x + 1 = -2$:

$$2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$S = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right\}$$

Contrôle : $\left(2 \times \frac{1}{2} + 1\right)^2 = 2^2 = 4 \checkmark$ et $\left(2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 1\right)^2 = (-2)^2 = 4 \checkmark$

c) $(x + 5)^2 = 0$: un carré est nul uniquement si la quantité elle-même l'est.

$$x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5 \quad S = \{-5\}$$

Il n'y a ici qu'une **seule** solution, le cas $k = 0$ étant le cas limite entre deux solutions et aucune.

L'erreur à éviter absolument. Écrire $(x - 2)^2 = 9 \Leftrightarrow x - 2 = 3$ seul : on perd alors une solution sur deux.

Une autre voie pour la question a). On peut aussi factoriser après avoir tout ramené d'un côté :

$$(x - 2)^2 - 9 = (x - 2)^2 - 3^2 = [(x - 2) - 3][(x - 2) + 3] = (x - 5)(x + 1)$$

et conclure par la règle du produit nul. Les deux méthodes donnent le même résultat $\checkmark$

Les solutions ne sont plus opposées. Elles sont symétriques **par rapport à 2** en a) : -1 et 5 sont bien tous deux à distance 3 de 2.

Réponse. a) $S = \{-1; 5\}$ — b) $S = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ — c) $S = \{-5\}$.

Correction de l'exercice 3 - Factoriser par un facteur commun

Pour A. Les deux termes contiennent x :

$$A = x^2 - 7x = x \times x - 7 \times x = x(x - 7)$$

Pour B. Les deux termes contiennent 3 et x , donc $3x$ est facteur commun :

$$B = 3x^2 + 6x = 3x \times x + 3x \times 2 = 3x(x + 2)$$

Pour C. Le facteur commun est le **groupement** $(x - 1)$, qui apparaît dans les deux termes :

$$C = (x - 1)[(x + 2) + 3x] = (x - 1)(4x + 2)$$

On peut encore factoriser le second facteur par 2 :

$$C = 2(x - 1)(2x + 1)$$

Le contrôle systématique. On développe pour vérifier. Pour $B : 3x(x + 2) = 3x^2 + 6x$ ✓
 Pour $C : 2(x - 1)(2x + 1) = 2(2x^2 + x - 2x - 1) = 2(2x^2 - x - 1) = 4x^2 - 2x - 2$, et le développement direct donne $x^2 + 2x - x - 2 + 3x^2 - 3x = 4x^2 - 2x - 2$ ✓

Ce que le facteur commun peut être. Un nombre, une lettre, une puissance, **ou une parenthèse entière** comme en C . C'est ce dernier cas qui est le moins repéré : il faut s'habituer à voir $(x - 1)$ comme un bloc unique.

Pourquoi ce travail est utile. Une expression factorisée se met immédiatement à zéro par la règle du produit nul. Sans factorisation, une équation comme $x^2 = 7x$ resterait hors de portée en Seconde.

Réponse. $A = x(x - 7)$; $B = 3x(x + 2)$; $C = (x - 1)(4x + 2) = 2(x - 1)(2x + 1)$.

Correction de l'exercice 4 - Des différences de carrés

Il faut à chaque fois **identifier** a et b .

Pour D : $a = x$ et $b = 5$, puisque $25 = 5^2$.

$$D = x^2 - 5^2 = (x - 5)(x + 5)$$

Pour E : $a = 2x$ (car $(2x)^2 = 4x^2$) et $b = 3$.

$$E = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3)(2x + 3)$$

Pour F : $a = x + 1$, pris comme un bloc, et $b = 4$.

$$F = (x + 1)^2 - 4^2 = [(x + 1) - 4][(x + 1) + 4] = (x - 3)(x + 5)$$

Pour G : $a = x$ et $b = \sqrt{7}$, puisque $(\sqrt{7})^2 = 7$.

$$G = x^2 - (\sqrt{7})^2 = (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$$

Le contrôle par développement. Pour F :

$(x - 3)(x + 5) = x^2 + 5x - 3x - 15 = x^2 + 2x - 15$, et le développement direct donne $x^2 + 2x + 1 - 16 = x^2 + 2x - 15$ ✓

La difficulté de E . Reconnaître $4x^2$ comme le carré de $2x$, et non de $4x$. Le contrôle est immédiat : $(2x)^2 = 2^2x^2 = 4x^2$ ✓

La difficulté de G . Accepter qu'un nombre qui n'est pas un carré parfait s'écrit quand même comme un carré : $7 = (\sqrt{7})^2$. C'est légitime pour tout nombre **positif**, et cela élargit beaucoup le champ de l'identité.

⚠ **Il n'existe aucune identité pour $a^2 + b^2$.** Une **somme** de deux carrés ne se factorise pas. Écrire $x^2 + 9 = (x + 3)(x - 3)$ est doublement faux.

Réponse. $D = (x - 5)(x + 5)$; $E = (2x - 3)(2x + 3)$; $F = (x - 3)(x + 5)$;
 $G = (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$.

Correction de l'exercice 5 - La règle du produit nul

a) Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est :

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \quad \text{ou} \quad 2x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

$$S = \left\langle -\frac{5}{2}; 3 \right\rangle$$

b) De même :

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

$$S = \left\langle -4; \frac{1}{2} \right\rangle$$

c) La règle s'étend à trois facteurs :

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 3x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{3} \quad \text{ou} \quad x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$S = \left\langle -2; 0; \frac{7}{3} \right\rangle$$

d) **Attention : la règle ne s'applique pas ici.** Le produit vaut 8 et non 0 : écrire « $x - 1 = 8$ ou $x + 6 = 8$ » serait une faute grave.

Il faut d'abord tout ramener dans le même membre :

$$(x - 1)(x + 6) = 8 \Leftrightarrow x^2 + 6x - x - 6 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 14 = 0$$

Cette équation ne se factorise pas de tête en Seconde : sans indication de l'énoncé, on ne peut pas la résoudre. (Une factorisation fournie, par exemple $(x - 2)(x + 7)$, permettrait de conclure : $x = 2$ ou $x = -7$.)

Contrôle de cette factorisation : $(x - 2)(x + 7) = x^2 + 7x - 2x - 14 = x^2 + 5x - 14 \checkmark$

La leçon de la question d). La règle du produit nul exige un **zéro** au second membre. C'est le zéro qui fait tout : il est le seul nombre qui ne puisse s'obtenir comme produit de deux facteurs non nuls.

Un contre-exemple parlant. $2 \times 4 = 8$, mais ni 2 ni 4 ne valent 8. En revanche, si un produit vaut 0, l'un des facteurs est nécessairement nul.

Réponse. a) $S = \left\langle -\frac{5}{2}; 3 \right\rangle$ — b) $S = \left\langle -4; \frac{1}{2} \right\rangle$ — c) $S = \left\langle -2; 0; \frac{7}{3} \right\rangle$ — d) la règle ne s'applique pas : il faut ramener à $x^2 + 5x - 14 = 0$.

Correction de l'exercice 6 - Reconnaître un carré parfait

a) On développe le carré proposé :

$$(x - 3)^2 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$$

L'égalité est vérifiée $\checkmark$ L'équation devient donc

$$(x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \quad S = \{3\}$$

Une **seule** solution : c'est le propre des carrés parfaits égaux à zéro.

b) On reconnaît $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$, puisque $2 \times x \times 2 = 4x \checkmark$ L'équation devient

$$(x + 2)^2 = 25 \Leftrightarrow x + 2 = 5 \quad \text{ou} \quad x + 2 = -5 \Leftrightarrow x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -7$$

$$S = \{-7; 3\}$$

Contrôle : $3^2 + 4 \times 3 + 4 = 9 + 12 + 4 = 25 \checkmark$ et $(-7)^2 + 4 \times (-7) + 4 = 49 - 28 + 4 = 25 \checkmark$

c) **Non.** Pour être un carré parfait de la forme $(x + b)^2 = x^2 + 2bx + b^2$, il faudrait que le terme constant soit le carré de la moitié du coefficient de x :

$$\frac{5}{2} = 2,5 \quad \text{et} \quad 2,5^2 = 6,25 \neq 4$$

Le terme constant devrait valoir 6,25, pas 4. L'expression $x^2 + 5x + 4$ n'est donc pas un carré parfait — elle se factorise tout de même, en $(x + 1)(x + 4)$, mais pas sous forme de carré.

Le test du carré parfait. Face à $x^2 + px + q$, on calcule $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ et on le compare à q : s'ils sont égaux, l'expression est $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$.

Contrôle du test sur a) et b). Pour $x^2 - 6x + 9$: $\left(\frac{-6}{2}\right)^2 = 9 \checkmark$ Pour $x^2 + 4x + 4$: $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4 \checkmark$ Les deux passent le test, la troisième non.

Réponse. a) le développement confirme, et $S = \{3\}$ — b) $(x + 2)^2 = 25$, donc $S = \{-7; 3\}$ — c) non : il faudrait un terme constant de 6,25.

Correction de l'exercice 7 - Deux expressions à mettre à zéro

a) On ramène tout dans le même membre, puis on factorise par x :

$$x^2 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0$$

Par la règle du produit nul : $x = 0$ ou $x = 4$.

$$S = \{0; 4\}$$

⚠ **Ne surtout pas diviser par x** : on obtiendrait « $x = 4$ » seul, en perdant la solution 0. Diviser par x suppose $x \neq 0$, ce qui exclut d'emblée une des solutions.

b) On factorise par $5x$:

$$5x^2 + 15x = 0 \Leftrightarrow 5x(x + 3) = 0$$

d'où $5x = 0$, soit $x = 0$, ou $x + 3 = 0$, soit $x = -3$.

$$S = \{-3; 0\}$$

Contrôle : $5 \times 9 + 15 \times (-3) = 45 - 45 = 0 \checkmark$

c) On reconnaît une différence de carrés :

$$x^2 - 81 = x^2 - 9^2 = (x - 9)(x + 9)$$

d'où $x = 9$ ou $x = -9$.

$$S = \{-9; 9\}$$

Le réflexe de reconnaissance. Quand l'expression n'a **pas de terme constant** (questions a et b), on factorise par x — et 0 est **toujours** solution. Quand elle n'a **pas de terme en x** (question c), on cherche une différence de carrés.

La vérification du nombre de solutions. Une équation du second degré a au plus **deux** solutions. En trouver trois signale une erreur ; n'en trouver qu'une n'est possible que dans le cas d'un carré parfait égalé à zéro.

Réponse. a) $S = \{0; 4\}$ — b) $S = \{-3; 0\}$ — c) $S = \{-9; 9\}$.

Correction de l'exercice 8 - Deux carrés égaux

a) Deux carrés sont égaux si et seulement si les quantités sont égales **ou opposées**.

Premier cas : $x - 1 = 2x + 3 \Leftrightarrow -1 - 3 = 2x - x \Leftrightarrow x = -4$.

Second cas : $x - 1 = -(2x + 3) \Leftrightarrow x - 1 = -2x - 3 \Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$.

$$S = \left\{-4; -\frac{2}{3}\right\}$$

Contrôle pour $x = -4$: $(-5)^2 = 25$ et $(-8 + 3)^2 = (-5)^2 = 25 \checkmark$

Contrôle pour $x = -\frac{2}{3}$: $\left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$ et $\left(-\frac{4}{3} + 3\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \checkmark$

b) **Premier cas** : $3x + 1 = x - 5 \Leftrightarrow 2x = -6 \Leftrightarrow x = -3$.

Second cas : $3x + 1 = -(x - 5) \Leftrightarrow 3x + 1 = -x + 5 \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$.

$$S = \{-3; 1\}$$

Contrôle pour $x = 1$: $4^2 = 16$ et $(-4)^2 = 16$ ✓

c) L'équation $A^2 = B^2$ équivaut à $A^2 - B^2 = 0$, soit, par l'identité,

$$(A - B)(A + B) = 0$$

La règle du produit nul donne alors $A - B = 0$ ou $A + B = 0$, c'est-à-dire $A = B$ ou $A = -B$. La méthode des « deux cas » n'est donc qu'une application déguisée de la différence de carrés.

Le piège du signe. Dans le second cas, le signe moins porte sur **toute** la parenthèse : $-(2x + 3) = -2x - 3$, et non $-2x + 3$. C'est l'erreur qui fait perdre la seconde solution.

Pourquoi il y a deux cas et pas un. Deux nombres de carrés égaux ne sont pas forcément égaux : 3 et -3 ont tous deux 9 pour carré. C'est exactement la même raison qui donne deux solutions à $x^2 = k$.

Réponse. a) $S = \left\{-4; -\frac{2}{3}\right\}$ — b) $S = \{-3; 1\}$ — c) $A^2 = B^2 \Leftrightarrow (A - B)(A + B) = 0$.

Correction de l'exercice 9 - Une factorisation en deux temps

a) On pose $a = x + 3$ et $b = x - 1$:

$$H = (a - b)(a + b) = [(x + 3) - (x - 1)][(x + 3) + (x - 1)]$$

Le premier crochet se simplifie remarquablement :

$$(x + 3) - (x - 1) = x + 3 - x + 1 = 4$$

et le second :

$$(x + 3) + (x - 1) = 2x + 2$$

D'où

$$H = 4(2x + 2) = 8(x + 1)$$

b) Par développement direct :

$$H = (x^2 + 6x + 9) - (x^2 - 2x + 1) = x^2 + 6x + 9 - x^2 + 2x - 1 = 8x + 8$$

C'est bien $8(x + 1)$ ✓ Les termes en x^2 se sont **éliminés** : H est en réalité une expression du **premier** degré.

c) $H = 0$ donne $8(x + 1) = 0$, soit $x = -1$.

$$S = \{-1\}$$

$H = 24$ donne $8(x + 1) = 24$, soit $x + 1 = 3$, soit $x = 2$.

$$S = \{2\}$$

Contrôle pour $x = 2$: $(2 + 3)^2 - (2 - 1)^2 = 25 - 1 = 24$ ✓

Ce que cet exercice illustre. Une expression qui **ressemble** au second degré peut n'être que du premier degré : les termes en x^2 se compensent. On ne le voit qu'après développement ou factorisation — d'où l'intérêt de faire les deux.

Le piège de la soustraction. En développant, le signe moins porte sur **tous** les termes de la seconde parenthèse : $-(x^2 - 2x + 1) = -x^2 + 2x - 1$. Oublier de changer les trois signes est l'erreur la plus courante.

La conséquence sur le nombre de solutions. $H = 24$ n'a qu'une solution, et non

deux : c'est cohérent avec une équation du premier degré.

Réponse. a) $H = 8(x + 1)$ — b) le développement donne $8x + 8$ ✓ — c) $S = \{-1\}$ puis $S = \{2\}$.

Correction de l'exercice 10 - Une factorisation fournie

a) On développe la forme proposée :

$$(x - 1)^2 - 4 = x^2 - 2x + 1 - 4 = x^2 - 2x - 3$$

C'est bien $P(x)$ ✓

b) La forme obtenue est une **différence de deux carrés**, puisque $4 = 2^2$:

$$P(x) = (x - 1)^2 - 2^2 = [(x - 1) - 2][(x - 1) + 2] = (x - 3)(x + 1)$$

Contrôle par développement : $(x - 3)(x + 1) = x^2 + x - 3x - 3 = x^2 - 2x - 3$ ✓

c) Par la règle du produit nul :

$$(x - 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -1 \quad S = \{-1; 3\}$$

Contrôle : $3^2 - 2 \times 3 - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$ ✓ et $(-1)^2 - 2 \times (-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$ ✓

La chaîne complète. Forme développée → forme canonique → différence de carrés → forme factorisée → solutions. C'est exactement la démarche qui, généralisée en Première, donnera la formule du discriminant.

Pourquoi l'énoncé fournit la forme canonique. Sans elle, on ne saurait pas factoriser $x^2 - 2x - 3$ en Seconde. En Première, on l'obtiendra seul ; ici, elle est **donnée** et l'on se contente de la vérifier avant de l'exploiter.

Comment elle se trouve, pour information. On complète le carré : $x^2 - 2x$ est le début de $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$, donc $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$, et $P(x) = (x - 1)^2 - 1 - 3 = (x - 1)^2 - 4$.

Réponse. a) le développement redonne $x^2 - 2x - 3$ — b) $P(x) = (x - 3)(x + 1)$ — c) $S = \{-1; 3\}$.

Correction de l'exercice 11 - Vérifier qu'un nombre est solution

a) On remplace x par 2 :

$$2^2 - 5 \times 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0 \quad \checkmark$$

Puis par 3 :

$$3^2 - 5 \times 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0 \quad \checkmark$$

Les deux nombres sont bien solutions.

b) On développe le produit :

$$(x - 2)(x - 3) = x^2 - 3x - 2x + 6 = x^2 - 5x + 6 \quad \checkmark$$

c) **Non.** Sous forme factorisée, l'équation s'écrit

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

et la règle du produit nul impose $x - 2 = 0$ ou $x - 3 = 0$. Il n'y a donc **aucune autre** possibilité : l'ensemble des solutions est exactement

$$S = \{2; 3\}$$

La différence entre vérifier et résoudre. La question a) **vérifie** que deux nombres conviennent, mais ne prouve pas qu'il n'y en a pas d'autres. Seule la **factorisation** le garantit : c'est elle qui donne la liste complète.

Le lien entre solutions et factorisation. Quand une équation du second degré a pour solutions α et β , l'expression se factorise en $(x - \alpha)(x - \beta)$. On peut donc deviner une factorisation à partir des solutions, et réciproquement — c'est un aller-retour très utile.

Le contrôle rapide. Dans $(x - 2)(x - 3) = x^2 - 5x + 6$, la somme des solutions vaut 5 (l'opposé du coefficient de x) et leur produit vaut 6 (le terme constant). Ce petit test valide instantanément une factorisation proposée.

Réponse. a) $4 - 10 + 6 = 0$ et $9 - 15 + 6 = 0$ ✓ — b) le développement donne $x^2 - 5x + 6$ ✓ — c) non : la forme factorisée donne exactement $S = \{2; 3\}$.

Correction de l'exercice 12 - Des équations à trier

a) **Méthode : isoler x^2** , ou reconnaître une différence de carrés après factorisation par 2.

$$2x^2 - 18 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3$$

$$S = \{-3; 3\}$$

b) **Méthode : facteur commun**, puisqu'il n'y a pas de terme constant.

$$x^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow x(x + 9) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -9$$

$$S = \{-9; 0\}$$

c) **Méthode : carré égal à une constante positive**, donc deux cas.

$$(x - 4)^2 = 49 \Leftrightarrow x - 4 = 7 \text{ ou } x - 4 = -7 \Leftrightarrow x = 11 \text{ ou } x = -3$$

$$S = \{-3; 11\}$$

Contrôle : $(11 - 4)^2 = 49$ ✓ et $(-3 - 4)^2 = (-7)^2 = 49$ ✓

d) **Méthode : signe.** On isole le carré :

$$x^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -16$$

Un carré n'est jamais négatif : l'équation n'a **aucune** solution.

$$S = \emptyset$$

Les indices de reconnaissance.

Forme de l'équation	Méthode
pas de terme en x	isoler x^2 , ou différence de carrés
pas de terme constant	facteur commun (0 est solution)
un carré = k	deux cas, $+\sqrt{k}$ et $-\sqrt{k}$
$x^2 =$ un nombre négatif	aucune solution

Le réflexe de départ. Avant tout calcul, on regarde **quels termes sont présents**. C'est cette lecture, et non la technique de calcul, qui fait la différence entre un exercice résolu en trois lignes et un exercice bloqué.

Réponse. a) $S = \{-3; 3\}$ — b) $S = \{-9; 0\}$ — c) $S = \{-3; 11\}$ — d) $S = \emptyset$.

Correction de l'exercice 13 - Deux nombres à trouver

a) On traduit l'énoncé : « le carré vaut 5 fois le nombre » s'écrit

$$x^2 = 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x - 5) = 0$$

d'où $x = 0$ ou $x = 5$. **Deux** nombres conviennent : 0 (dont le carré 0 vaut bien 5×0) et 5 (dont le carré 25 vaut bien 5×5).

b) « Le carré dépasse son double de 15 » s'écrit $x^2 = 2x + 15$, soit

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 3) = 0$$

d'où $x = 5$ ou $x = -3$.

Contrôle pour $x = 5$: $25 = 10 + 15$ ✓ Pour $x = -3$: $9 = -6 + 15$ ✓

c) On traduit : $x^2 = -4$. Un carré étant toujours positif ou nul, **aucun** nombre ne convient.

La traduction d'un énoncé. « Le double de x » s'écrit $2x$, « dépasse de 15 » signifie « est égal à ... plus 15 ». Écrire l'équation est souvent plus difficile que la résoudre : on relit l'énoncé phrase par phrase.

Le piège de la question a). Répondre « 5 » seul. La solution 0 est souvent jugée « triviale » et oubliée, alors qu'elle vérifie parfaitement l'énoncé — c'est encore la conséquence de la division interdite par x .

Le contrôle systématique. Chaque solution trouvée se **retraduit** dans l'énoncé d'origine, pas seulement dans l'équation : on s'assure ainsi que la mise en équation était correcte.

Réponse. a) 0 et 5 — b) 5 et -3 — c) non : un carré n'est jamais négatif.

Correction de l'exercice 14 - Une erreur à corriger

a) Pour $x = 9$:

$$9^2 = 81 \quad \text{et} \quad 9 \times 9 = 81 \quad \checkmark$$

b) Pour $x = 0$:

$$0^2 = 0 \quad \text{et} \quad 9 \times 0 = 0 \quad \checkmark$$

La valeur 0 est donc bien solution, et l'élève l'a perdue.

c) **L'erreur** : en divisant par x , l'élève a supposé **implicitement** que $x \neq 0$. Or 0 est précisément une des deux solutions. On ne divise jamais les deux membres d'une équation par une quantité qui **peut être nulle**.

La résolution correcte consiste à factoriser au lieu de diviser :

$$x^2 = 9x \Leftrightarrow x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow x(x - 9) = 0$$

Par la règle du produit nul :

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9 \quad S = \{0; 9\}$$

Pourquoi c'est une erreur si fréquente. Sur les équations du **premier** degré, diviser par un coefficient numérique est parfaitement licite : $3x = 12$ donne bien $x = 4$. Le danger n'apparaît que lorsque le diviseur **contient l'inconnue**.

Le signal d'alarme à reconnaître. Une équation du second degré doit avoir **deux** solutions, sauf cas particulier du carré parfait. N'en trouver qu'une doit conduire à se relire.

La règle en une phrase. Face à une équation où x^2 et x coexistent sans terme constant : on **factorise par** x , jamais on ne divise. Et 0 est alors toujours solution.

Réponse. a) $81 = 81$ ✓ — b) $0 = 0$ ✓ — c) diviser par x suppose $x \neq 0$ et perd la solution 0 ; il faut factoriser : $x(x - 9) = 0$, donc $S = \{0; 9\}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : huit équations

a) On isole x^2 :

$$4x^2 = 100 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = 5 \text{ ou } x = -5 \quad S = \{-5; 5\}$$

b) Facteur commun :

$$x(x + 7) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -7 \quad S = \{-7; 0\}$$

c) Carré égal à 1, donc deux cas :

$$x + 6 = 1 \Rightarrow x = -5 \quad \text{ou} \quad x + 6 = -1 \Rightarrow x = -7 \\ S = \{-7; -5\}$$

d) Différence de carrés, avec $9x^2 = (3x)^2$:

$$9x^2 - 4 = (3x - 2)(3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \text{ ou } x = -\frac{2}{3} \\ S = \left\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$$

e) Produit nul direct :

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \text{ou} \quad 3x + 9 = 0 \Rightarrow x = -3 \quad S = \{-3; 2\}$$

f) Carré parfait, puisque $\left(\frac{10}{2}\right)^2 = 25$:

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -5 \quad S = \{-5\}$$

Contrôle : $(-5)^2 + 10 \times (-5) + 25 = 25 - 50 + 25 = 0 \checkmark$

Le bilan des méthodes. Isoler x^2 (a), facteur commun (b), carré égal à une constante (c), différence de carrés (d), produit nul direct (e), carré parfait (f). Ces six situations couvrent l'essentiel de ce que l'on rencontre en Seconde.

Le nombre de solutions. Cinq équations sur six en ont deux ; seule f) n'en a qu'une, parce que c'est un carré parfait égalé à zéro. Compter ses solutions est le premier contrôle à faire.

L'ordre des réflexes. On regarde d'abord quels termes sont présents, on choisit la factorisation, on applique le produit nul, et l'on **vérifie chaque solution** dans l'équation de départ.

Réponse. a) $\{-5; 5\}$ — b) $\{-7; 0\}$ — c) $\{-7; -5\}$ — d) $\left\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$ — e) $\{-3; 2\}$ — f) $\{-5\}$.