Plaquette 3 – Formes et transformations

Équations et inéquations du second degré — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les trois formes d'une expression du second degré.

Forme	Écriture	Ce qu'elle donne immédiatement
développée	ax^2+bx+c	la valeur $f(0)=c$
factorisée	$a(x-x_1)(x-x_2)$	les racines x_1 et x_2, le signe
canonique	$a(x-\alpha)^2+\beta$	le sommet $S(\alpha\,;\beta)$, l'extremum

Passer de l'une à l'autre.

— **factorisée → développée** : on développe et on réduit ;
— **canonique → développée** : on utilise $(x-\alpha)^2=x^2-2\alpha x+\alpha^2$;
— **canonique → factorisée** : quand $\beta<0$, on reconnaît une différence de carrés

$$a\left[(x-\alpha)^2-k^2\right]=a(x-\alpha-k)(x-\alpha+k)$$

Lire la forme canonique. Avec $a>0$, le carré est positif ou nul, donc

$$f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta\geq\beta \qquad \text{avec égalité pour } x=\alpha$$

La fonction admet donc un **minimum** β, atteint en α. Avec $a<0$, c'est un **maximum**.

Trois conséquences utiles de la forme canonique.

— la parabole est **symétrique** par rapport à la droite verticale d'équation $x=\alpha$;
— si $a>0$ et $\beta>0$, l'expression ne s'annule **jamais** : pas de forme factorisée ;
— deux valeurs symétriques par rapport à α ont la **même image** : $f(\alpha-h)=f(\alpha+h)$.

⚠ **Toujours contrôler une transformation en redéveloppant.** C'est la seule vérification qui ne se trompe pas.

Correction de l'exercice 1 – Développer trois produits

Pour A, on développe terme à terme :

$$A=x^2+5x-3x-15=x^2+2x-15$$

Pour B :

$$B=2x^2+8x-x-4=2x^2+7x-4$$

Pour C, on utilise l'identité $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$:

$$C=x^2+2\times x\times 3+3^2=x^2+6x+9$$

Le contrôle par une valeur. On teste $x=1$ dans les deux écritures.

Pour A, la forme factorisée donne $(1-3)(1+5)=(-2)\times 6=-12$ et la forme développée $1+2-15=-12$: les deux résultats coïncident. De même pour B : $(2-1)(1+4)=5$ et $2+7-4=5$. Pour C : $4^2=16$ et $1+6+9=16$.

Ce test ne prouve pas l'égalité pour **tout** x, mais une valeur qui ne correspond pas signale une erreur à coup sûr. C'est le contrôle le plus rapide qui soit.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

L'erreur classique sur C. Écrire $(x+3)^2 = x^2 + 9$, en oubliant le **double produit** $2 \times x \times 3 = 6x$. Le test avec $x = 1$ l'attrape immédiatement : $16 \neq 10$.

Ce qu'on vérifie aussi. Le coefficient de x^2 dans le développement est le **produit** des coefficients de x des deux facteurs : $1 \times 1 = 1$ pour A, $2 \times 1 = 2$ pour B, ce qui est bien le cas. Et le terme constant est le produit des deux constantes : $-3 \times 5 = -15$ pour A, comme trouvé.

Réponse. $A = x^2 + 2x - 15$; $B = 2x^2 + 7x - 4$; $C = x^2 + 6x + 9$.

Correction de l'exercice 2 – Factoriser trois expressions

Pour D : différence de deux carrés. Avec $a = x$ et $b = 4$:

$$D = x^2 - 4^2 = (x-4)(x+4)$$

Pour E : facteur commun. Les deux termes contiennent x :

$$E = x(x+8)$$

Pour F : identité du carré. On teste : la moitié de -10 vaut -5, et $(-5)^2 = 25$, ce qui correspond au terme constant. Donc

$$F = (x-5)^2$$

Le contrôle par développement. $(x-4)(x+4) = x^2 - 16$ ✓ ; $x(x+8) = x^2 + 8x$ ✓ ; $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$ ✓

Comment reconnaître la bonne technique.

Indice dans l'expression	Technique
deux termes, une soustraction de carrés	différence de carrés
tous les termes contiennent x	facteur commun
trois termes, avec $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c$	identité du carré

Le test du carré parfait, en détail. Pour $x^2 + bx + c$, on calcule $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ et on le compare à c. Si les deux coïncident, l'expression vaut $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$.

Ce qui ne se factorise pas en Seconde. Une expression à trois termes qui **échoue** au test du carré parfait, comme $x^2 + 5x + 4$: sans indication de l'énoncé, on ne sait pas la factoriser. (Elle vaut pourtant $(x+1)(x+4)$ — mais rien ne permet de le deviner.)

Réponse. $D = (x-4)(x+4)$ (différence de carrés) ; $E = x(x+8)$ (facteur commun) ; $F = (x-5)^2$ (identité du carré).

Correction de l'exercice 3 – Trois écritures d'une même fonction

a) On développe la forme canonique :

$$(x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 4 - 1 = x^2 - 4x + 3 \text{ ✓}$$

b) On développe la forme factorisée :

$$(x-1)(x-3) = x^2 - 3x - x + 3 = x^2 - 4x + 3 \text{ ✓}$$

Les trois écritures désignent donc bien **la même fonction**.

c) **Pour** $f(0)$, la forme **développée** est la plus rapide : le terme constant donne la réponse.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$f(0) = 3$$

Pour $f(2)$, la forme **canonique** est immédiate, le carré s'annulant :

$$f(2) = (2-2)^2 - 1 = -1$$

Pour $f(5)$, la forme **factorisée** demande le moins de calculs :

$$f(5) = (5-1)(5-3) = 4 \times 2 = 8$$

Contrôles croisés. Avec la forme développée : $f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$ ✓ et $f(5) = 25 - 20 + 3 = 8$ ✓ Les trois formes donnent évidemment les mêmes images.

Ce que chaque forme révèle. La développée donne $f(0) = 3$; la factorisée donne les racines 1 et 3 ; la canonique donne le sommet $S(2\,;-1)$, donc le minimum -1 atteint en 2.

Le réflexe à installer. Avant de calculer, on regarde les trois écritures disponibles et l'on choisit celle qui fait disparaître le plus de calculs. C'est un gain de temps considérable en devoir, et une source d'erreurs en moins.

Réponse. a) et b) les deux développements redonnent $x^2 - 4x + 3$ ✓ — c) $f(0) = 3$ (développée), $f(2) = -1$ (canonique), $f(5) = 8$ (factorisée).

Correction de l'exercice 4 – Choisir la bonne forme

a) **Forme développée** : le terme constant donne l'image de 0.

$$g(0) = 10$$

b) **Forme factorisée**, puis règle du produit nul :

$$2(x-1)(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 5 \qquad S = \{1\,;5\}$$

c) **Forme canonique**. Le coefficient $a = 2$ est positif et le carré est positif ou nul, donc

$$g(x) = 2(x-3)^2 - 8 \geq -8$$

avec égalité lorsque $(x-3)^2 = 0$, c'est-à-dire pour $x = 3$. Le **minimum** de g vaut -8, atteint en $x = 3$.

d) **Forme factorisée** à nouveau, pour le tableau de signes. Les racines sont 1 et 5, et le coefficient 2 est positif.

Intervalle	$]-\infty\,;1[$	$]1\,;5[$	$]5\,;+\infty[$
Signe de $g(x)$	+	−	+

Le contrôle de cohérence entre les réponses. Le minimum -8 est **négatif**, ce qui est cohérent avec l'existence de deux racines : une parabole tournée vers le haut dont le sommet est sous l'axe le coupe forcément deux fois.

Le contrôle du sommet par la symétrie. L'abscisse du sommet est le **milieu des deux racines** :

$$\frac{1+5}{2} = 3 \ \checkmark$$

Cette vérification est valable dès que la parabole a deux racines, et elle est instantanée.

Le contrôle de $g(0)$ **par les trois formes.** Canonique : $2 \times 9 - 8 = 10$ ✓ Factorisée : $2 \times (-1) \times (-5) = 10$ ✓ Développée : 10 ✓

Réponse. a) développée, $g(0) = 10$ — b) factorisée, $S = \{1\,;5\}$ — c) canonique, minimum -8 en $x = 3$ — d) factorisée : positif hors de $[1\,;5]$, négatif entre.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 5 – De la canonique à la factorisée

a) On développe le carré puis on réduit :

$$h(x) = x^2 - 4x + 4 - 9 = x^2 - 4x - 5$$

b) La forme canonique est une **différence de deux carrés**, puisque $9 = 3^2$:

$$h(x) = (x-2)^2 - 3^2 = [(x-2) - 3][(x-2) + 3] = (x-5)(x+1)$$

Contrôle par développement : $(x-5)(x+1) = x^2 + x - 5x - 5 = x^2 - 4x - 5$ ✓ identique à la question a).

c) **Les racines** se lisent sur la forme factorisée :

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5 \quad \text{ou} \quad x = -1$$

Le minimum se lit sur la forme canonique : le carré étant positif ou nul,

$$h(x) \geq -9 \qquad \text{avec égalité pour } x = 2$$

Le minimum vaut -9, atteint en $x = 2$.

Le contrôle par la symétrie. L'abscisse du sommet est le milieu des racines :

$$\frac{-1+5}{2} = 2 \ \checkmark$$

La condition pour que ce passage soit possible. Il faut que la constante retranchée soit **positive** : une forme $(x-\alpha)^2 + k$ avec $k > 0$ n'est pas une différence de carrés et ne se factorise pas. C'est le cas de l'exercice 12 de cette plaquette.

L'enchaînement complet. Canonique → différence de carrés → factorisée → racines. C'est exactement le chemin qui, généralisé en Première, produira la formule du discriminant.

Réponse. a) $h(x) = x^2 - 4x - 5$ — b) $h(x) = (x-5)(x+1)$ — c) racines -1 et 5, minimum -9 atteint en $x = 2$.

Correction de l'exercice 6 – Compléter le carré

a) On développe le membre de droite :

$$(x+3)^2 - 9 = x^2 + 6x + 9 - 9 = x^2 + 6x \ \checkmark$$

L'idée : $x^2 + 6x$ est le **début** du développement de $(x+3)^2$, auquel il manque 9. On l'ajoute puis on le retranche aussitôt.

b) On remplace dans $k(x)$:

$$k(x) = \Big[(x+3)^2 - 9\Big] + 5 = (x+3)^2 - 4$$

Contrôle : $(x+3)^2 - 4 = x^2 + 6x + 9 - 4 = x^2 + 6x + 5$ ✓

c) **Le minimum.** Le carré est positif ou nul, donc

$$k(x) \geq -4 \qquad \text{avec égalité pour } x = -3$$

Le minimum vaut -4, atteint en $x = -3$.

La factorisation, par différence de carrés puisque $4 = 2^2$:

$$k(x) = (x+3)^2 - 2^2 = (x+3-2)(x+3+2) = (x+1)(x+5)$$

Contrôle : $(x+1)(x+5) = x^2 + 6x + 5$ ✓ Les racines sont donc -1 et -5, et leur milieu vaut $\frac{-1+(-5)}{2} = -3$ ✓ cohérent avec le sommet.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

La règle de la complétion du carré. Pour $x^2 + bx$, on écrit

$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Ici $b = 6$, donc $\frac{b}{2} = 3$ et l'on retranche 9.

À quoi cela sert. C'est la seule méthode qui permet, en Seconde, de trouver un extremum **sans** le lire sur un graphique — et elle donne au passage la factorisation quand elle existe.

Réponse. a) le développement donne $x^2 + 6x$ ✓ — b) $k(x) = (x + 3)^2 - 4$ — c) minimum -4 en $x = -3$, et $k(x) = (x + 1)(x + 5)$.

Correction de l'exercice 7 – Lire un sommet

On identifie α et β dans l'écriture $a(x - \alpha)^2 + \beta$, en prenant garde au **signe de** α.

Pour f_1 : $\alpha = 4$, $\beta = 2$, $a = 1 > 0$. Sommet $S(4\,;2)$, **minimum** 2 atteint en 4.

Pour f_2 : on lit $-(x + 1)^2 + 5$, donc $\alpha = -1$ (car $x + 1 = x - (-1)$), $\beta = 5$ et $a = -1 < 0$. Sommet $S(-1\,;5)$, **maximum** 5 atteint en -1.

Pour f_3 : $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $a = 3 > 0$. Sommet $S(2\,;0)$, **minimum** 0 atteint en 2.

Pour f_4 : $\alpha = -3$, $\beta = -7$, $a = 1 > 0$. Sommet $S(-3\,;-7)$, **minimum** -7 atteint en -3.

Le contrôle par le calcul de $f(\alpha)$**.** $f_2(-1) = -0 + 5 = 5$ ✓ ; $f_4(-3) = 0 - 7 = -7$ ✓ Le sommet est toujours obtenu en annulant le carré.

Le piège du signe de α**.** Dans $(x + 1)^2$, le sommet est en $x = -1$ et non $+1$: on lit la valeur qui **annule** la parenthèse. C'est l'erreur la plus fréquente sur cette lecture.

Le rôle du signe de a**.** Positif, la parabole est tournée vers le **haut** et le sommet est un minimum. Négatif, elle est tournée vers le **bas** et le sommet est un maximum. La valeur de a (ici 3 pour f_3) ne change ni α ni β, seulement l'ouverture de la parabole.

Une conséquence directe sur les racines. f_1 a un minimum $2 > 0$: elle ne s'annule **jamais**. f_3 a un minimum nul : elle s'annule **une seule fois**, en 2. f_4 a un minimum négatif : elle s'annule **deux fois**.

Réponse. f_1 : $S(4\,;2)$, minimum 2 — f_2 : $S(-1\,;5)$, maximum 5 — f_3 : $S(2\,;0)$, minimum 0 — f_4 : $S(-3\,;-7)$, minimum -7.

Correction de l'exercice 8 – Combien de racines ?

On raisonne sur le **signe de** β et celui de a.

Pour f_1 : $a = 1 > 0$ et $\beta = 4 > 0$, donc $f_1(x) \geq 4 > 0$ pour tout x. L'équation n'a **aucune** solution.

Pour f_2 : $\beta = -9 < 0$. Le minimum est négatif et la parabole est tournée vers le haut : elle coupe l'axe **deux fois**. L'équation a **deux** solutions.

(On peut d'ailleurs les trouver : $(x + 2)^2 = 9$ donne $x = 1$ ou $x = -5$.)

Pour f_3 : $\beta = 0$. Le minimum est nul, atteint en $x = 5$: la parabole **touche** l'axe en un seul point. L'équation a **une** solution, $x = 5$.

Pour f_4 : $a = -1 < 0$ et $\beta = -1 < 0$, donc $f_4(x) \leq -1 < 0$ pour tout x. L'équation n'a **aucune** solution.

La règle générale. Pour $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Situation	Nombre de racines
a et β de **même signe**	aucune
$\beta = 0$	une seule, $x = \alpha$
a et β de **signes contraires**	deux

L'interprétation graphique. Tout se joue sur la position du sommet par rapport à l'axe des abscisses, combinée au sens d'ouverture de la parabole. Un sommet au-dessus de l'axe avec une parabole tournée vers le haut ne redescend jamais jusqu'à l'axe.

L'intérêt de ce raisonnement. Il répond en une ligne à une question qui demanderait sinon une résolution complète — et il fonctionne même quand les racines ne sont pas calculables simplement.

Réponse. f_1 : aucune — f_2 : deux — f_3 : une seule ($x = 5$) — f_4 : aucune.

Correction de l'exercice 9 – Avec un coefficient devant le carré

a) On développe le carré, puis on distribue le 2 :

$$m(x) = 2\left(x^2 - 2x + 1\right) + 3 = 2x^2 - 4x + 2 + 3 = 2x^2 - 4x + 5$$

b) L'écriture $2(x-1)^2 + 3$ donne directement $\alpha = 1$ et $\beta = 3$, avec $a = 2 > 0$:

$$\text{sommet } S(1\,;3), \qquad \text{minimum 3 atteint en } x = 1$$

c) On calcule avec la forme la plus commode :

$$m(0) = 2 \times 1 + 3 = 5 \qquad m(1) = 0 + 3 = 3 \qquad m(2) = 2 \times 1 + 3 = 5$$

La remarque : $m(0) = m(2) = 5$. Les deux abscisses 0 et 2 sont **symétriques par rapport à** 1, l'abscisse du sommet, et elles ont donc la même image.

C'est la traduction de la symétrie de la parabole par rapport à la droite verticale $x = 1$:

$$m(1-h) = m(1+h) \qquad \text{pour tout } h$$

Le contrôle par la forme développée. $m(0) = 5$ ✓ (le terme constant) et $m(2) = 8 - 8 + 5 = 5$ ✓

L'erreur à éviter au développement. Oublier de multiplier **tous** les termes du carré par 2 : écrire $2x^2 - 2x + 1 + 3$ au lieu de $2x^2 - 4x + 2 + 3$. Le test avec $x = 0$ ne l'attraperait pas, mais $x = 1$ si : $2 - 2 + 1 + 3 = 4 \neq 3$.

Ce que ce minimum permet de conclure. Comme $\beta = 3 > 0$ et $a = 2 > 0$, la fonction ne s'annule jamais : l'équation $m(x) = 0$ n'a aucune solution, et $m(x) > 0$ pour tout x.

Réponse. a) $m(x) = 2x^2 - 4x + 5$ — b) $S(1\,;3)$, minimum 3 en $x = 1$ — c) 5, 3 et 5 : 0 et 2 sont symétriques par rapport à 1.

Correction de l'exercice 10 – Compléter un tableau de formes

Première ligne. On factorise la forme canonique par différence de carrés :

$$(x-3)^2 - 1 = (x - 3 - 1)(x - 3 + 1) = (x-4)(x-2)$$

Contrôle : $(x-4)(x-2) = x^2 - 6x + 8$ ✓

Deuxième ligne. On développe :

$$(x+1)^2 - 16 = x^2 + 2x + 1 - 16 = x^2 + 2x - 15$$

et on factorise, puisque $16 = 4^2$:

$$(x+1)^2 - 4^2 = (x + 1 - 4)(x + 1 + 4) = (x-3)(x+5)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle : $(x-3)(x+5) = x^2+2x-15$ ✓

Troisième ligne. On complète le carré : la moitié de -2 vaut -1, dont le carré est 1, donc

$$x^2-2x = (x-1)^2-1$$

Contrôle : $(x-1)^2-1 = x^2-2x+1-1 = x^2-2x$ ✓

Le tableau complété :

Développée	Canonique	Factorisée
x^2-6x+8	$(x-3)^2-1$	$(x-4)(x-2)$
$x^2+2x-15$	$(x+1)^2-16$	$(x-3)(x+5)$
x^2-2x	$(x-1)^2-1$	$x(x-2)$

Le contrôle transversal par le sommet. Sur chaque ligne, l'abscisse du sommet doit être le **milieu des racines**.

Ligne 1 : $\frac{4+2}{2} = 3$, abscisse lue dans $(x-3)^2-1$. Ligne 2 : $\frac{3+(-5)}{2} = -1$, lue dans $(x+1)^2-16$. Ligne 3 : $\frac{0+2}{2} = 1$, lue dans $(x-1)^2-1$. Les trois lignes sont cohérentes.

Ce que ce tableau met en évidence. Les trois formes ne sont pas trois fonctions, mais **trois costumes** de la même. On passe de l'une à l'autre à volonté, et chaque passage se contrôle par développement.

Réponse. Ligne 1 : $(x-4)(x-2)$ — Ligne 2 : $x^2+2x-15$ et $(x-3)(x+5)$ — Ligne 3 : $(x-1)^2-1$.

Correction de l'exercice 11 – Reconnaître une courbe

a) La courbe coupe l'axe des abscisses en $A(1\,;0)$ et $B(3\,;0)$: les **racines** sont 1 et 3.

Le point le plus bas est $S(2\,;-1)$: c'est le **sommet**, et le minimum vaut -1.

b) Avec $a = 1$, la forme **factorisée** s'écrit à partir des racines :

$$f(x) = (x-1)(x-3)$$

La forme **canonique** s'écrit à partir du sommet $S(\alpha\,;\beta) = (2\,;-1)$:

$$f(x) = (x-2)^2-1$$

c) On développe les deux :

$$(x-1)(x-3) = x^2-3x-x+3 = x^2-4x+3$$

$$(x-2)^2-1 = x^2-4x+4-1 = x^2-4x+3$$

Les deux formes donnent la **même** expression développée ✓

Le contrôle par la symétrie. L'abscisse du sommet doit être le milieu des racines : $\frac{1+3}{2} = 2$ ✓ Ce test valide la lecture graphique avant même tout calcul.

Le contrôle par l'ordonnée à l'origine. Sur la courbe, on lit $f(0) = 3$, et la forme développée donne bien un terme constant de 3 ✓ Un troisième point de vérification, gratuit.

Pourquoi l'énoncé précise $a = 1$. Sans cette donnée, une infinité de paraboles passent par les mêmes racines : $2(x-1)(x-3)$, $-(x-1)(x-3)$, etc. Les racines fixent la **forme** de l'expression, pas son coefficient. Ici, l'ordonnée $f(0) = 3$ aurait d'ailleurs permis de

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

retrouver $a = 1$.

Réponse. a) racines 1 et 3, sommet $S(2\,;-1)$ — b) $f(x) = (x-1)(x-3) = (x-2)^2 - 1$ — c) les deux développements donnent $x^2 - 4x + 3$ ✓

Correction de l'exercice 12 – Une expression sans forme factorisée

a) On développe :

$$p(x) = x^2 - 2x + 1 + 2 = x^2 - 2x + 3$$

b) Le carré $(x-1)^2$ est positif ou nul pour tout x. En ajoutant 2 :

$$p(x) = (x-1)^2 + 2 \geq 2 > 0$$

L'expression est donc **strictement positive** pour tout réel x, avec un minimum de 2 atteint en $x = 1$.

c) **Non.** Si une telle factorisation existait, l'équation $p(x) = 0$ aurait des solutions (x_1 et x_2), par la règle du produit nul. Or on vient de montrer que $p(x) \geq 2 > 0$: l'équation n'a **aucune** solution.

L'expression ne possède donc **pas** de forme factorisée de ce type. Elle n'a que deux écritures utiles : la développée et la canonique.

Ce qu'il faut retenir. Les trois formes n'existent pas toujours. La **développée** et la **canonique** existent pour toute expression du second degré ; la **factorisée** n'existe que si l'expression s'annule.

Le critère de reconnaissance. Sur la forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$, la factorisation est possible si et seulement si a et β sont de **signes contraires** (deux racines) ou si $\beta = 0$ (une racine double).

L'interprétation graphique. La parabole de p a son sommet en $(1\,;2)$, au-dessus de l'axe des abscisses, et elle est tournée vers le haut : elle ne rencontre jamais l'axe. Pas d'intersection, donc pas de racine, donc pas de facteur.

Le contrôle par quelques valeurs. $p(0) = 3$, $p(1) = 2$, $p(2) = 3$, $p(-1) = 6$: toujours positif ✓ et l'on retrouve la symétrie $p(0) = p(2)$ autour de $\alpha = 1$.

Réponse. a) $p(x) = x^2 - 2x + 3$ — b) $p(x) = (x-1)^2 + 2 \geq 2 > 0$ — c) non : p ne s'annule jamais, donc aucune forme factorisée n'existe.

Correction de l'exercice 13 – Résoudre avec la forme canonique

a) On développe :

$$(x-4)^2 - 9 = x^2 - 8x + 16 - 9 = x^2 - 8x + 7 \ ✓$$

b) On isole le carré :

$$(x-4)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 9 \Leftrightarrow x - 4 = 3 \ \text{ ou } \ x - 4 = -3$$

$$x = 7 \qquad \text{ou} \qquad x = 1 \qquad S = \{1\,;7\}$$

Contrôle : $7^2 - 56 + 7 = 49 - 56 + 7 = 0$ ✓ et $1 - 8 + 7 = 0$ ✓

c) Même méthode, avec un second membre différent :

$$(x-4)^2 - 9 = -5 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 4 \Leftrightarrow x - 4 = 2 \ \text{ ou } \ x - 4 = -2$$

$$x = 6 \qquad \text{ou} \qquad x = 2 \qquad S = \{2\,;6\}$$

Contrôle : $6^2 - 48 + 7 = 36 - 48 + 7 = -5$ ✓ et $4 - 16 + 7 = -5$ ✓

L'avantage de la forme canonique. Elle permet de résoudre $q(x) = k$ pour **n'importe**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

quelle valeur de k, alors que la forme factorisée ne sert que pour $k = 0$. C'est la méthode générale de résolution en Seconde.

Le test préalable sur k. L'équation $(x-4)^2 = k+9$ n'a de solutions que si $k+9 \geq 0$, soit $k \geq -9$. Pour $k = -10$, par exemple, il n'y en aurait aucune — ce qui est cohérent avec un minimum de -9.

Le contrôle par la symétrie. Les solutions sont toujours symétriques par rapport à $\alpha = 4$: $\frac{1+7}{2} = 4$ ✓ et $\frac{2+6}{2} = 4$ ✓ Ce contrôle détecte instantanément une erreur de signe.

Réponse. a) le développement donne $x^2 - 8x + 7$ ✓ — b) $S = \{1\,;7\}$ — c) $S = \{2\,;6\}$.

Correction de l'exercice 14 – Utiliser la symétrie

a) Le sommet est en $\alpha = 5$. Les abscisses 3 et 7 sont **symétriques par rapport à** 5, puisqu'elles en sont toutes deux à distance 2 :

$$5 - 3 = 2 \qquad \text{et} \qquad 7 - 5 = 2$$

Elles ont donc la **même image** : $r(3) = r(7)$.

b) On vérifie :

$$r(3) = (3-5)^2 + 1 = (-2)^2 + 1 = 5 \qquad r(7) = (7-5)^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5 \ ✓$$

c) On résout $r(x) = 17$:

$$(x-5)^2 + 1 = 17 \Leftrightarrow (x-5)^2 = 16 \Leftrightarrow x - 5 = 4 \ \text{ ou } \ x - 5 = -4$$

$$x = 9 \qquad \text{ou} \qquad x = 1$$

Les deux nombres sont 1 et 9. **Contrôle** : $(1-5)^2 + 1 = 16 + 1 = 17$ ✓ et $(9-5)^2 + 1 = 17$ ✓

Ils sont bien symétriques par rapport à 5 : $\frac{1+9}{2} = 5$ ✓

La propriété générale. Pour toute fonction du second degré de sommet d'abscisse α :

$$f(\alpha - h) = f(\alpha + h) \qquad \text{pour tout } h$$

Graphiquement, la parabole est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \alpha$.

L'usage pratique. Elle divise par deux le travail de tracé : on calcule les images pour $x \geq \alpha$, puis on complète par symétrie. Et elle fournit un contrôle gratuit sur toute résolution d'équation $f(x) = k$.

Le cas particulier de k égal au minimum. Pour $k = 1$, l'équation $(x-5)^2 = 0$ n'a qu'**une** solution, $x = 5$: les deux solutions symétriques se confondent au sommet. Pour $k < 1$, il n'y en a aucune.

Réponse. a) $r(3) = r(7)$ car 3 et 7 sont symétriques par rapport à 5 — b) les deux valent 5 ✓ — c) 1 et 9.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : une fonction sous toutes ses formes

a) On développe la forme canonique :

$$(x-5)^2 - 4 = x^2 - 10x + 25 - 4 = x^2 - 10x + 21 \ ✓$$

b) C'est une différence de carrés, puisque $4 = 2^2$:

$$f(x) = (x-5)^2 - 2^2 = (x - 5 - 2)(x - 5 + 2) = (x-7)(x-3)$$

Contrôle : $(x-7)(x-3) = x^2 - 3x - 7x + 21 = x^2 - 10x + 21$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) **Le sommet**, lu sur la forme canonique : $S(5\,;-4)$, minimum -4 atteint en $x=5$.

Les racines, lues sur la forme factorisée : 3 et 7.

L'image de 0, lue sur la forme développée : $f(0)=21$.

Contrôle croisé : le milieu des racines vaut $\frac{3+7}{2}=5$ ✓ égal à l'abscisse du sommet.

d) **L'inéquation** $f(x)\leq 0$ se traite sur la forme factorisée. Les racines sont 3 et 7, et le coefficient de x^2 est positif : l'expression est négative **entre** les racines, bornes incluses.

$$S=[3\,;7]$$

L'équation $f(x)=5$ se traite sur la forme canonique :

$$(x-5)^2-4=5 \Leftrightarrow (x-5)^2=9 \Leftrightarrow x-5=3 \text{ ou } x-5=-3$$

$$x=8 \qquad \text{ou} \qquad x=2 \qquad S=\{2\,;8\}$$

Contrôle : $f(8)=64-80+21=5$ ✓ et $f(2)=4-20+21=5$ ✓ Et $\frac{2+8}{2}=5$ ✓

Le bilan de la plaquette. Chaque question appelle une forme : $f(0)$ la développée, les racines et le signe la factorisée, l'extremum et les équations $f(x)=k$ la canonique. Savoir passer de l'une à l'autre — et **redévelopper pour vérifier** — est tout le travail de cette plaquette.

Réponse. a) le développement redonne $x^2-10x+21$ ✓ — b) $f(x)=(x-7)(x-3)$ — c) $S(5\,;-4)$, racines 3 et 7, $f(0)=21$ — d) $S=[3\,;7]$ puis $S=\{2\,;8\}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).