

Plaquette 4 – Modélisation

Équations et inéquations du second degré – Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Mettre un problème en équation.

- 1. Choisir l'inconnue x et écrire son **domaine** : une longueur vérifie $x > 0$, une quantité est souvent entière, une durée est positive.
- 2. Exprimer les autres grandeurs en fonction de x (la seconde dimension, la quantité vendue, la hauteur...).
- 3. Écrire la grandeur étudiée, puis **développer**.
- 4. Résoudre, et **revenir au contexte**.

Les situations types.

Situation	Expression
aire d'un rectangle de périmètre P fixé	$x\left(\frac{P}{2} - x\right)$
aire avec une dimension liée à l'autre	$x(x + d)$
recette, quantité décroissant avec le prix	$p \times q(p)$
hauteur d'un projectile	$-\frac{g}{2}t^2 + vt + h_0$

Trouver un extremum sans dérivée. L'énoncé fournit une forme canonique, que l'on **vérifie** par développement. Avec $a < 0$:

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \leq \beta \quad \text{avec égalité pour } x = \alpha$$

donc β est le **maximum**, atteint en α . Avec $a > 0$, c'est le **minimum**.

Résoudre $f(x) = k$ avec la forme canonique. On isole le carré, puis on applique les deux cas $+\sqrt{\quad}$ et $-\sqrt{\quad}$.

⚠ **Le tri final.** Une solution négative pour une longueur, une durée antérieure au lancer, une quantité non entière : le contexte **élimine** ce que le calcul produit. Cette étape fait partie de la rédaction attendue.

Correction de l'exercice 1 – Un enclos contre un mur

a) Deux côtés mesurent x mètres chacun, et le grillage total vaut 60 m. Le troisième côté mesure donc

$$60 - 2x \text{ mètres}$$

L'aire du rectangle est le produit des deux dimensions :

$$A(x) = x(60 - 2x) = 60x - 2x^2 \quad \text{pour } 0 < x < 30$$

(Le domaine vient de ce que le troisième côté doit être strictement positif : $60 - 2x > 0$.)

b) On développe la forme proposée :

$$450 - 2(x - 15)^2 = 450 - 2(x^2 - 30x + 225) = 450 - 2x^2 + 60x - 450 = 60x - 2x^2 \quad \checkmark$$

c) Le carré $(x - 15)^2$ est positif ou nul, donc $-2(x - 15)^2$ est négatif ou nul, et

$$A(x) = 450 - 2(x - 15)^2 \leq 450$$

L'égalité a lieu pour $(x - 15)^2 = 0$, c'est-à-dire $x = 15$ m. Le troisième côté vaut alors $60 - 30 = 30$ m.

L'enclos optimal mesure donc **15 m sur 30 m**, pour une aire maximale de **450 m²**.

Le contrôle sur quelques valeurs. $A(10) = 400$, $A(14) = 448$, $A(15) = 450$, $A(16) = 448$, $A(20) = 400$: l'aire croît puis décroît, avec un sommet en 15 ✓ La symétrie autour de $x = 15$ se lit aussi sur le graphique.

Pourquoi ce n'est pas un carré. Avec quatre côtés à clôturer, l'optimum serait le carré. Ici le mur remplace un côté : la forme optimale est un rectangle **deux fois plus long que large**. Changer la contrainte change l'optimum.

Le rôle du domaine. Les valeurs $x = 0$ et $x = 30$ donnent une aire nulle : l'enclos est alors aplati. C'est cohérent avec les deux racines de $x(60 - 2x)$, et le maximum est à mi-chemin ✓

Réponse. a) troisième côté $60 - 2x$, aire $A(x) = x(60 - 2x)$ — b) le développement redonne $60x - 2x^2$ ✓ — c) 15 m sur 30 m, aire maximale 450 m².

Correction de l'exercice 2 - La trajectoire d'un ballon

a) On développe la forme proposée :

$$-5(t - 1)^2 + 6 = -5(t^2 - 2t + 1) + 6 = -5t^2 + 10t - 5 + 6 = -5t^2 + 10t + 1 \quad \checkmark$$

b) Le carré $(t - 1)^2$ est positif ou nul, donc $-5(t - 1)^2$ est négatif ou nul :

$$h(t) = -5(t - 1)^2 + 6 \leq 6$$

L'égalité a lieu pour $t = 1$. La hauteur **maximale** est donc de **6 mètres**, atteinte au bout de **1 seconde**.

c) On calcule avec la forme canonique :

$$h(0,5) = -5 \times (-0,5)^2 + 6 = -5 \times 0,25 + 6 = 4,75 \text{ m}$$

$$h(1,5) = -5 \times (0,5)^2 + 6 = 4,75 \text{ m}$$

Le commentaire : les deux hauteurs sont **égales**. Les instants 0,5 s et 1,5 s sont symétriques par rapport à $t = 1$, l'instant du sommet : le ballon repasse à la même hauteur en montant puis en descendant.

Contrôle par la forme développée : $h(0,5) = -1,25 + 5 + 1 = 4,75 \quad \checkmark$

La hauteur de départ. $h(0) = 1$ m, ce qui correspond bien à la hauteur du lancer, et se lit directement comme terme constant de la forme développée ✓

L'interprétation du coefficient -5. Il vaut $-\frac{g}{2}$ avec $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$, arrondi à 10. C'est lui qui donne la parabole tournée vers le **bas**, donc l'existence d'un maximum et non d'un minimum.

Le domaine de validité. Le modèle ne vaut que jusqu'à la retombée du ballon, vers $t \approx 2,1$ s. Au-delà, $h(t)$ deviendrait négative, ce qui n'a pas de sens pour une hauteur.

Réponse. a) le développement redonne $-5t^2 + 10t + 1$ ✓ — b) 6 mètres au bout de 1 seconde — c) 4,75 m dans les deux cas : instants symétriques par rapport au sommet.

Correction de l'exercice 3 - Quand le ballon touche-t-il le sol ?

a) On isole le carré :

$$-5(t-1)^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow 5(t-1)^2 = 6 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 1,2$$

$$t-1 = \sqrt{1,2} \approx 1,095 \quad \text{ou} \quad t-1 = -\sqrt{1,2} \approx -1,095$$

d'où $t \approx 2,10$ s ou $t \approx -0,10$ s.

La solution négative est **écartée** : elle correspondrait à un instant **avant** le lancer. Le ballon touche donc le sol au bout d'environ 2,1 **secondes**.

b) **Non**. Le maximum de h vaut 6 mètres : l'équation $h(t) = 7$ donnerait

$$-5(t-1)^2 = 1 \Leftrightarrow (t-1)^2 = -0,2$$

ce qui est impossible, un carré n'étant jamais négatif. Le ballon ne dépasse jamais 6 m.

c) On résout $h(t) > 5$:

$$-5(t-1)^2 + 6 > 5 \Leftrightarrow -5(t-1)^2 > -1 \Leftrightarrow (t-1)^2 < 0,2$$

(la division par -5 **inverse** le sens de l'inégalité).

$$-\sqrt{0,2} < t-1 < \sqrt{0,2} \quad \text{soit} \quad 1-0,447 < t < 1+0,447$$

Le ballon est à plus de 5 mètres entre $t \approx 0,55$ s et $t \approx 1,45$ s, soit pendant environ

$$2 \times \sqrt{0,2} \approx 0,89 \text{ seconde}$$

Le contrôle par la symétrie. L'intervalle obtenu est centré sur $t = 1$, l'instant du sommet ✓ C'est toujours le cas pour une inéquation $h(t) > k$: la solution est un intervalle symétrique autour de α .

Le piège de la question c). Diviser par -5 sans inverser l'inégalité donnerait $(t-1)^2 > 0,2$, soit l'ensemble **complémentaire** — c'est-à-dire exactement les instants où le ballon est **en dessous** de 5 m.

Le tri des solutions, encore. En a), le calcul produit deux instants ; un seul a un sens physique. Écarter l'autre **et dire pourquoi** fait partie de la réponse.

Réponse. a) $t \approx 2,1$ s (la solution négative est écartée) — b) non : le maximum est 6 m — c) environ 0,89 s, entre $t \approx 0,55$ et $t \approx 1,45$ s.

Correction de l'exercice 4 - Un terrain rectangulaire

a) La longueur vaut $x + 5$, et l'aire est le produit des deux dimensions :

$$x(x+5) = 84 \quad \text{avec } x > 0$$

soit, en développant et en ramenant tout d'un côté :

$$x^2 + 5x - 84 = 0$$

b) On développe la factorisation proposée :

$$(x-7)(x+12) = x^2 + 12x - 7x - 84 = x^2 + 5x - 84 \quad \checkmark$$

c) Par la règle du produit nul :

$$(x-7)(x+12) = 0 \Leftrightarrow x = 7 \quad \text{ou} \quad x = -12$$

La solution -12 est **écartée** : une largeur est strictement positive. Reste $x = 7$.

Le terrain mesure donc **7 m sur 12 m**.

Contrôle : $12 - 7 = 5 \quad \checkmark$ (la longueur dépasse bien la largeur de 5 m) et $7 \times 12 = 84 \text{ m}^2 \quad \checkmark$

Le contrôle de la factorisation. Somme des racines : $7 + (-12) = -5$, soit l'opposé du coefficient de $x \quad \checkmark$ Produit : $7 \times (-12) = -84$, soit le terme constant $\checkmark$

Pourquoi l'énoncé fournit la factorisation. En Seconde, $x^2 + 5x - 84$ ne se factorise

pas de tête : sans le discriminant, il faut que l'énoncé la donne. La première chose à faire est de la **vérifier**, jamais de l'admettre.

Le tri final. Le calcul donne toujours deux solutions ; c'est le **contexte** qui en élimine une. Écrire « $x = -12$ est à rejeter car une largeur est positive » est une phrase attendue en évaluation.

Réponse. a) $x(x + 5) = 84$ — b) le développement donne $x^2 + 5x - 84$ ✓ — c) $x = 7$ (la solution -12 est écartée) : le terrain mesure 7 m sur 12 m.

Correction de l'exercice 5 - Le bénéfice d'une entreprise

a) On développe :

$$-(x - 30)^2 + 400 = -(x^2 - 60x + 900) + 400 = -x^2 + 60x - 900 + 400 = -x^2 + 60x - 500 \quad \checkmark$$

b) Le carré est positif ou nul, donc $-(x - 30)^2$ est négatif ou nul :

$$B(x) = -(x - 30)^2 + 400 \leq 400$$

L'égalité a lieu pour $x = 30$. Le bénéfice est donc **maximal pour 30 objets** par jour, et vaut alors 400 €.

c) On isole le carré :

$$\begin{aligned} -(x - 30)^2 + 400 = 0 &\Leftrightarrow (x - 30)^2 = 400 \Leftrightarrow x - 30 = 20 \quad \text{ou} \quad x - 30 = -20 \\ x = 50 &\quad \text{ou} \quad x = 10 \end{aligned}$$

Les deux valeurs appartiennent au domaine $[0; 60]$: ce sont les deux **seuils de rentabilité**. L'entreprise est bénéficiaire pour une production **strictement comprise entre 10 et 50 objets**, et déficitaire en dehors.

Contrôle : $B(10) = -100 + 600 - 500 = 0 \quad \checkmark$ et $B(50) = -2\,500 + 3\,000 - 500 = 0 \quad \checkmark$

L'interprétation économique. Produire trop peu ne couvre pas les frais fixes de 500 € ; produire trop fait exploser les coûts (heures supplémentaires, matière plus chère). Entre les deux, il existe une production optimale — c'est le sens du coefficient **négatif** devant x^2 .

Le contrôle par la symétrie. Les deux seuils sont symétriques par rapport à l'optimum : $\frac{10 + 50}{2} = 30 \quad \checkmark$

Le bénéfice à vide. $B(0) = -500$ € : sans production, l'entreprise perd ses frais fixes. Cette valeur se lit directement comme terme constant de la forme développée.

Réponse. a) le développement redonne $-x^2 + 60x - 500$ ✓ — b) 30 objets, bénéfice maximal 400 € — c) $x = 10$ et $x = 50$, les deux seuils de rentabilité.

Correction de l'exercice 6 - Un bénéfice suffisant

a) On isole le carré :

$$-(x - 30)^2 + 400 \geq 300 \Leftrightarrow -(x - 30)^2 \geq -100 \Leftrightarrow (x - 30)^2 \leq 100$$

(la multiplication par -1 **inverse** le sens de l'inégalité).

Puis, 100 étant positif :

$$-10 \leq x - 30 \leq 10 \Leftrightarrow 20 \leq x \leq 40$$

L'entreprise réalise au moins 300 € de bénéfice pour une production comprise entre 20 et 40 objets.

Contrôle : $B(20) = -100 + 400 = 300 \quad \checkmark$; $B(30) = 400 \geq 300 \quad \checkmark$; $B(45) = -225 + 400 = 175 < 300 \quad \checkmark$

b) Les entiers de 20 à 40 inclus sont au nombre de

$$40 - 20 + 1 = 21$$

Il y a donc 21 **productions entières** possibles.

c) **Non.** Le maximum du bénéfice vaut 400 €. L'équation $B(x) = 450$ donnerait

$$-(x - 30)^2 = 50 \Leftrightarrow (x - 30)^2 = -50$$

ce qui est impossible. Aucune production ne permet d'atteindre 450 €.

Le piège de l'inversion. En multipliant par -1 , il faut retourner l'inégalité : $\geq$ devient $\leq$. L'oublier donnerait $(x - 30)^2 \geq 100$, soit exactement les productions où le bénéfice est **inférieur** à 300 €.

Le décompte d'entiers. Entre deux bornes entières **incluses**, le nombre d'entiers est $\max - \min + 1$, et non la simple différence. Oublier le $+1$ est l'erreur classique : de 20 à 22, il y a trois entiers et non deux.

La cohérence des trois réponses. L'intervalle $[20; 40]$ est centré sur 30 ✓ et il est contenu dans $]10; 50[$, la zone de rentabilité ✓

Réponse. a) $20 \leq x \leq 40$ — b) 21 productions entières — c) non : le bénéfice maximal est 400 €.

Correction de l'exercice 7 - Deux nombres de somme fixée

a) Si l'un des nombres vaut x , l'autre vaut $12 - x$. Leur produit est

$$P(x) = x(12 - x) = 12x - x^2 \quad \text{pour } 0 \leq x \leq 12$$

(les deux nombres devant être positifs).

b) On développe la forme proposée :

$$36 - (x - 6)^2 = 36 - (x^2 - 12x + 36) = 36 - x^2 + 12x - 36 = 12x - x^2 \quad \checkmark$$

c) Le carré étant positif ou nul :

$$P(x) = 36 - (x - 6)^2 \leq 36$$

avec égalité pour $x = 6$. Le produit est donc **maximal quand les deux nombres sont égaux à 6**, et il vaut alors 36.

Le contrôle sur quelques couples. $1 \times 11 = 11$; $3 \times 9 = 27$; $5 \times 7 = 35$; $6 \times 6 = 36$; $7 \times 5 = 35$. Le maximum est bien atteint à l'équilibre ✓

Le résultat général. À **somme fixée**, le produit de deux nombres positifs est maximal quand ils sont **égaux**. C'est le même énoncé que « parmi les rectangles de périmètre donné, le carré a la plus grande aire ».

La symétrie du problème. $P(x) = P(12 - x)$: échanger les deux nombres ne change pas le produit. La parabole est donc symétrique par rapport à $x = 6$, ce que confirme la forme canonique.

Les cas limites. $P(0) = P(12) = 0$: si l'un des nombres est nul, le produit l'est aussi. Le maximum est exactement à mi-chemin des deux racines ✓

Réponse. a) l'autre vaut $12 - x$, et $P(x) = x(12 - x)$ — b) le développement redonne $12x - x^2$ ✓ — c) le produit est maximal pour $x = 6$, les deux nombres valant 6, et vaut 36.

Correction de l'exercice 8 - Fixer un prix de vente

a) La recette est le produit du prix par la quantité vendue :

$$R(p) = p(100 - 2p) = 100p - 2p^2$$

b) On développe la forme proposée :

$$-2(p - 25)^2 + 1\,250 = -2(p^2 - 50p + 625) + 1\,250 = -2p^2 + 100p - 1\,250 + 1\,250 = 100p - 2p^2 \checkmark$$

c) Le carré étant positif ou nul :

$$R(p) = -2(p - 25)^2 + 1\,250 \leq 1\,250$$

avec égalité pour $p = 25$. La recette est **maximale pour un prix de 25 €**, et vaut alors 1 250 € par jour. Le commerçant vend alors $100 - 50 = 50$ articles.

d) Pour $p = 40$:

$$R(40) = -2 \times 225 + 1\,250 = -450 + 1\,250 = 800 \text{ €}$$

La recette chute à 800 €, car il ne vend plus que $100 - 80 = 20$ articles.

Le commentaire : augmenter le prix n'augmente pas indéfiniment la recette. Au-delà de 25 €, la baisse du **nombre de ventes** l'emporte sur la hausse du prix unitaire. C'est tout le sens du coefficient négatif devant p^2 .

Le contrôle par la symétrie. $R(10) = 100 \times 10 - 200 = 800$ € également : les prix 10 € et 40 € sont symétriques par rapport à 25 et donnent la même recette ✓ Mais ils ne sont pas équivalents pour le commerçant : à 10 €, il vend 80 articles, donc supporte bien plus de coûts.

La différence entre recette et bénéfice. La recette ignore les coûts. Le bénéfice, lui, retrancherait le coût de production des articles vendus — et son maximum ne serait pas atteint au même prix.

Le domaine du modèle. Pour $p \geq 50$, la quantité $100 - 2p$ deviendrait négative, ce qui n'a pas de sens : le modèle cesse d'être valable, et l'énoncé le borne pour cette raison.

Réponse. a) $R(p) = p(100 - 2p)$ — b) le développement redonne $100p - 2p^2$ ✓ — c) prix de 25 €, recette maximale 1 250 € — d) 800 € seulement : la baisse des ventes l'emporte.

Correction de l'exercice 9 - Un triangle rectangle

a) La hauteur vaut $x + 3$, et l'aire d'un triangle est la moitié du produit de la base par la hauteur :

$$\frac{x(x + 3)}{2} = 20 \quad \text{avec } x > 0$$

En multipliant les deux membres par 2 :

$$x(x + 3) = 40 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 40 = 0$$

b) On développe la factorisation proposée :

$$(x - 5)(x + 8) = x^2 + 8x - 5x - 40 = x^2 + 3x - 40 \checkmark$$

c) Par la règle du produit nul :

$$x = 5 \quad \text{ou} \quad x = -8$$

La solution -8 est **écartée** : une base est strictement positive. Reste $x = 5$ cm, et la hauteur vaut $5 + 3 = 8$ cm.

Contrôle : l'aire vaut $\frac{5 \times 8}{2} = 20 \text{ cm}^2$ ✓ et la hauteur dépasse bien la base de 3 cm ✓

Le contrôle de la factorisation. Somme des racines : $5 + (-8) = -3$, opposé du coefficient de x ✓ Produit : $5 \times (-8) = -40$, terme constant ✓

L'étape à ne pas oublier. Multiplier par 2 **avant** de développer : travailler avec la

fraction $\frac{x(x+3)}{2} - 20 = 0$ compliquerait inutilement la factorisation.

La formulation du tri. « La valeur -8 ne convient pas car une longueur est strictement positive » : cette phrase est attendue. Le calcul donne deux solutions, la géométrie n'en garde qu'une.

Réponse. a) $\frac{x(x+3)}{2} = 20$, soit $x^2 + 3x - 40 = 0$ — b) le développement confirme — c) base 5 cm et hauteur 8 cm.

Correction de l'exercice 10 - Un cadre autour d'un tableau

a) Le cadre ajoute x de chaque côté, donc $2x$ à chaque dimension. L'aire totale vaut

$$(20 + 2x)(30 + 2x) = 600 + 40x + 60x + 4x^2 = 4x^2 + 100x + 600$$

L'aire du **cadre seul** s'obtient en retranchant l'aire du tableau ($20 \times 30 = 600 \text{ cm}^2$) :

$$A_{\text{cadre}}(x) = 4x^2 + 100x + 600 - 600 = 4x^2 + 100x$$

b) On résout $4x^2 + 100x = 216$, soit $4x^2 + 100x - 216 = 0$. En divisant les deux membres par 4 :

$$x^2 + 25x - 54 = 0 \quad \checkmark$$

On vérifie la factorisation :

$$(x - 2)(x + 27) = x^2 + 27x - 2x - 54 = x^2 + 25x - 54 \quad \checkmark$$

c) Par la règle du produit nul : $x = 2$ ou $x = -27$. Une largeur étant strictement positive, on retient

$$x = 2 \text{ cm}$$

Contrôle : avec un cadre de 2 cm, l'ensemble mesure 24 cm sur 34 cm, soit une aire totale de 816 cm^2 . L'aire du cadre vaut $816 - 600 = 216 \text{ cm}^2 \quad \checkmark$

Le piège de la question a). Ajouter x et non $2x$ à chaque dimension. Le cadre entoure le tableau : il ajoute sa largeur **des deux côtés**. Un croquis rapide évite cette erreur systématique.

L'intérêt de diviser par 4. L'équation $4x^2 + 100x - 216 = 0$ et $x^2 + 25x - 54 = 0$ ont exactement les mêmes solutions, mais la seconde se factorise avec des nombres plus petits. Simplifier avant de factoriser est un réflexe utile.

Le contrôle de la factorisation. Somme : $2 + (-27) = -25 \quad \checkmark$ Produit : $2 \times (-27) = -54 \quad \checkmark$

Réponse. a) aire totale $(20 + 2x)(30 + 2x)$, aire du cadre $4x^2 + 100x$ — b) on obtient bien $x^2 + 25x - 54 = 0 = (x - 2)(x + 27)$ — c) le cadre mesure 2 cm de large.

Correction de l'exercice 11 - Un jet d'eau

a) On développe :

$$-0,5(x - 2)^2 + 2 = -0,5(x^2 - 4x + 4) + 2 = -0,5x^2 + 2x - 2 + 2 = -0,5x^2 + 2x \quad \checkmark$$

b) Le carré étant positif ou nul :

$$j(x) = -0,5(x - 2)^2 + 2 \leq 2$$

avec égalité pour $x = 2$. La hauteur **maximale** est de 2 **mètres**, atteinte à 2 **mètres** de la buse.

c) On résout $j(x) = 0$, en utilisant cette fois la forme **factorisée**, plus rapide :

$$-0,5x^2 + 2x = x(-0,5x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -0,5x + 2 = 0 \Rightarrow x = 4$$

La solution $x = 0$ correspond à la buse elle-même ; l'eau retombe donc à 4 **mètres** de la buse.

d) **Non.** L'eau retombe à 4 m de la buse, alors que le bassin n'a que 3 m de rayon : il faudrait un rayon d'au moins 4 mètres.

Le contrôle par la symétrie. Le sommet est à mi-chemin des deux racines : $\frac{0+4}{2} = 2$ ✓ cohérent avec la question b).

Le choix de la forme. La question b) appelle la forme **canonique** (extremum), la question c) la forme **factorisée** (racines). Utiliser la canonique en c) aurait donné $(x - 2)^2 = 4$, soit $x = 4$ ou $x = 0$ — même résultat, un peu plus long.

L'interprétation de la question d). C'est le genre de vérification concrète qui donne son sens au calcul : le dimensionnement du bassin dépend directement de la racine non nulle de j .

La forme du jet. Le coefficient $-0,5$ est négatif, donc la parabole est tournée vers le bas : le jet monte, culmine, puis redescend. Un coefficient positif décrirait une courbe physiquement impossible pour un jet d'eau.

Réponse. a) le développement redonne $-0,5x^2 + 2x$ ✓ — b) 2 m de haut, à 2 m de la buse — c) à 4 mètres — d) non : il faudrait un rayon d'au moins 4 m.

Correction de l'exercice 12 - Un champ à clôturer

a) L'aire vaut 150 m^2 et la largeur x , donc le côté parallèle à la rivière mesure

$$\frac{150}{x} \text{ mètres}$$

La clôture comprend les deux côtés de largeur x et le côté parallèle :

$$L(x) = 2x + \frac{150}{x} \quad \text{pour } x > 0$$

b) On calcule :

$$L(5) = 10 + 30 = 40 \text{ m} \quad L(10) = 20 + 15 = 35 \text{ m} \quad L(15) = 30 + 10 = 40 \text{ m}$$

c) Parmi les trois, c'est $x = 10 \text{ m}$ qui demande le moins de clôture : 35 m, contre 40 m pour les deux autres.

Le champ correspondant mesure alors 10 m de large sur $\frac{150}{10} = 15 \text{ m}$ de long.

Ce que l'exercice met en évidence. Les valeurs 5 et 15 donnent **la même** longueur de clôture, alors qu'elles décrivent des champs très différents. La longueur diminue puis augmente : il existe un optimum, situé entre les deux.

Pourquoi on ne le détermine pas ici. La fonction $L(x) = 2x + \frac{150}{x}$ n'est **pas** du second degré : elle mêle un terme en x et un terme en $\frac{1}{x}$. Sa forme canonique n'existe pas, et l'optimum exact ($x = \sqrt{75} \approx 8,66 \text{ m}$) se trouve en Première, avec la dérivée.

Le contrôle de cohérence. À aire fixée, un champ très étroit est très long (donc coûteux en clôture du côté rivière) et un champ très large coûte cher en côtés perpendiculaires. Le compromis est au milieu — ce que confirment les trois valeurs calculées.

La différence avec l'exercice 1. Là, le **périmètre** était fixé et l'on cherchait l'aire maximale : un problème du second degré. Ici, c'est l'**aire** qui est fixée et l'on cherche le périmètre minimal : ce n'en est plus un.

Réponse. a) côté parallèle $\frac{150}{x}$, et $L(x) = 2x + \frac{150}{x}$ — b) 40 m, 35 m et 40 m — c) $x = 10 \text{ m}$, pour 35 m de clôture.

Correction de l'exercice 13 - Une somme de deux carrés

a) Si l'un des nombres vaut x , l'autre vaut $10 - x$. La somme de leurs carrés est

$$S(x) = x^2 + (10 - x)^2 = x^2 + 100 - 20x + x^2 = 2x^2 - 20x + 100$$

b) On développe la forme proposée :

$$2(x - 5)^2 + 50 = 2(x^2 - 10x + 25) + 50 = 2x^2 - 20x + 50 + 50 = 2x^2 - 20x + 100 \quad \checkmark$$

c) Le coefficient $a = 2$ est **positif** et le carré est positif ou nul, donc

$$S(x) = 2(x - 5)^2 + 50 \geq 50$$

avec égalité pour $x = 5$. La somme des carrés est donc **minimale quand les deux nombres valent 5**, et elle vaut alors 50.

Le contrôle sur quelques couples. $(0; 10) \rightarrow 100$; $(2; 8) \rightarrow 4 + 64 = 68$;

$(4; 6) \rightarrow 16 + 36 = 52$; $(5; 5) \rightarrow 25 + 25 = 50$; $(7; 3) \rightarrow 49 + 9 = 58$. Le minimum est bien à l'équilibre $\checkmark$

La différence avec l'exercice 7. Là, le produit était **maximal** à l'équilibre ; ici, la somme des carrés y est **minimale**. La différence vient du signe de a : négatif dans un cas, positif dans l'autre.

Comment le prévoir. En développant, le coefficient de x^2 vaut 2 (deux carrés qui s'ajoutent) : il est nécessairement positif, donc la parabole est tournée vers le haut et l'extremum est un **minimum**. On peut le savoir avant même de chercher la forme canonique.

La symétrie. $S(x) = S(10 - x)$: échanger les deux nombres ne change rien. L'axe de symétrie est donc $x = 5$, ce que confirme la forme canonique $\checkmark$

Réponse. a) $S(x) = x^2 + (10 - x)^2 = 2x^2 - 20x + 100$ — b) le développement confirme — c) les deux nombres valent 5, et la somme des carrés vaut 50.

Correction de l'exercice 14 - Freinage et sécurité

a) À 50 km/h :

$$d(50) = \frac{2\,500}{100} + \frac{50}{3,6} = 25 + 13,9 \approx 39 \text{ mètres}$$

À 100 km/h :

$$d(100) = \frac{10\,000}{100} + \frac{100}{3,6} = 100 + 27,8 \approx 128 \text{ mètres}$$

b) **Non.** La distance passe de 39 m à 128 m, soit un rapport d'environ

$$\frac{128}{39} \approx 3,3$$

Elle est donc multipliée par plus de **trois**, et non par deux.

La raison : le terme de **réaction** ($\frac{v}{3,6}$) double bien, mais le terme de **freinage** ($\frac{v^2}{100}$), lui, est **quadruplé**. C'est ce dernier qui domine à grande vitesse.

c) À 90 km/h :

$$d(90) = \frac{8\,100}{100} + \frac{90}{3,6} = 81 + 25 = 106 \text{ mètres}$$

Le véhicule a besoin de 106 m pour s'arrêter, bien plus que les 60 m disponibles : il ne peut **pas** s'arrêter à temps.

Il faudrait rouler nettement moins vite : à 50 km/h, 39 m suffisent ; à 60 km/h, $d(60) = 36 + 16,7 \approx 53$ m, ce qui passe encore.

Le rôle des deux termes. À 50 km/h, la réaction représente un tiers de la distance totale ; à 100 km/h, seulement un cinquième. Plus on va vite, plus le **freinage** pèse — et il croît comme le carré de la vitesse.

La conversion cachée. Le 3,6 convertit les km/h en m/s : v km/h valent $\frac{v}{3,6}$ m/s, soit la distance parcourue en une seconde de réaction. À 90 km/h, cela fait 25 mètres parcourus sans avoir encore touché la pédale.

Le message de sécurité routière. C'est précisément ce terme quadratique qui justifie les limitations : réduire la vitesse de 20 % réduit la distance de freinage de 36 %.

Réponse. a) environ 39 m puis 128 m — b) non : elle est multipliée par plus de 3, le freinage étant quadruplé — c) non : il faudrait 106 m.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une piste d'athlétisme

a) La piste ajoute x de chaque côté, donc $2x$ à chaque dimension :

$$A_{\text{totale}}(x) = (40 + 2x)(60 + 2x) = 2\,400 + 80x + 120x + 4x^2 = 4x^2 + 200x + 2\,400$$

L'aire du terrain vaut $40 \times 60 = 2\,400$ m², donc l'aire de la **piste seule** est

$$A_{\text{piste}}(x) = 4x^2 + 200x \quad \text{pour } x > 0$$

b) On résout $4x^2 + 200x = 1\,344$, soit $4x^2 + 200x - 1\,344 = 0$. En divisant par 4 :

$$x^2 + 50x - 336 = 0 \quad \checkmark$$

On vérifie la factorisation :

$$(x - 6)(x + 56) = x^2 + 56x - 6x - 336 = x^2 + 50x - 336 \quad \checkmark$$

c) Par la règle du produit nul : $x = 6$ ou $x = -56$. Une largeur étant positive, la piste mesure

$$x = 6 \text{ mètres}$$

Contrôle : l'ensemble mesure alors 52 m sur 72 m, soit 3 744 m². En retranchant le terrain : $3\,744 - 2\,400 = 1\,344$ m² ✓

d) On résout $A_{\text{piste}}(x) = 700$, soit $4x^2 + 200x - 700 = 0$, ou après division par 4 :

$$x^2 + 50x - 175 = 0$$

Vérifions la valeur proposée :

$$3,5^2 + 50 \times 3,5 - 175 = 12,25 + 175 - 175 = 12,25 \neq 0$$

La valeur $x = 3,5$ ne convient **pas** : elle donne une aire de piste de

$$4 \times 12,25 + 200 \times 3,5 = 49 + 700 = 749 \text{ m}^2$$

soit 49 m² de trop. La largeur cherchée est donc **légèrement inférieure** à 3,5 m.

En testant $x = 3,3$: $4 \times 10,89 + 660 = 43,56 + 660 \approx 703,6$ m². En testant $x = 3,28$: $\approx 699,0$ m², et $x = 3,29$ donne $\approx 701,3$ m². La largeur cherchée est donc d'environ 3,28 m.

Ce que la question d) enseigne. Une valeur « proposée » se **vérifie** toujours par le calcul, jamais on ne l'admet. Ici elle est fausse, et seul le contrôle le révèle.

Pourquoi on procède par encadrement. L'équation $x^2 + 50x - 175 = 0$ n'a pas de solution simple, et sans discriminant on ne sait pas la résoudre exactement en Seconde. On encadre alors par essais successifs, ce qui donne une valeur approchée suffisante

pour un chantier.

Le bilan de la plaquette. Nommer l'inconnue et son domaine, exprimer la grandeur, choisir la forme (factorisée pour les racines, canonique pour l'extremum), résoudre — puis **trier** les solutions et revenir à l'unité.

Réponse. a) aire totale $(40 + 2x)(60 + 2x)$, piste $4x^2 + 200x$ — b) on obtient $x^2 + 50x - 336 = (x - 6)(x + 56)$ — c) piste de 6 m — d) non, $x = 3,5$ donne 749 m^2 ; la largeur est d'environ 3,28 m.