

Plaquette 5 - Synthèse difficile

Équations et inéquations du second degré — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Factoriser en deux temps.

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B) \quad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont des expressions}$$

Le résultat se réduit ensuite, et il faut souvent factoriser encore le facteur obtenu.

Changer d'inconnue. Une équation en x^4 et x^2 se traite en posant $X = x^2$:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \implies X^2 - 5X + 4 = 0 \implies \text{puis } x^2 = X_1 \text{ et } x^2 = X_2$$

△ Chaque valeur **positive** de X redonne **deux** valeurs de x ; une valeur négative n'en redonne aucune.

Prouver un signe constant. La forme canonique répond quand la factorisation échoue :

$$a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{est du signe de } a \text{ pour tout } x, \text{ si } \beta \text{ est du signe de } a$$

Discuter selon un paramètre. Le nombre de solutions de $X^2 = m$, ou celui de $(x - \alpha)^2 = m$, se lit sur le **signe de** m : deux si $m > 0$, une si $m = 0$, aucune si $m < 0$.

Tableaux de signes mixtes. Quand un produit et un quotient se combinent, on range **toutes** les valeurs remarquables — racines du numérateur **et** valeurs interdites — dans l'ordre croissant, sur une seule ligne d'en-tête.

Le signe d'un produit avec $a < 0$. Tout s'inverse par rapport au cas $a > 0$: l'expression $a(x - x_1)(x - x_2)$ est **positive entre** les racines et négative à l'extérieur.

Correction de l'exercice 1 - Une factorisation en deux temps

a) C'est une différence de deux carrés, avec $a = 2x - 1$ et $b = x + 3$:

$$A = (a - b)(a + b) = [(2x - 1) - (x + 3)][(2x - 1) + (x + 3)]$$

On réduit chaque crochet :

$$(2x - 1) - (x + 3) = 2x - 1 - x - 3 = x - 4$$

$$(2x - 1) + (x + 3) = 3x + 2$$

D'où

$$A = (x - 4)(3x + 2)$$

b) Par développement direct :

$$A = (4x^2 - 4x + 1) - (x^2 + 6x + 9) = 4x^2 - 4x + 1 - x^2 - 6x - 9 = 3x^2 - 10x - 8$$

Et la forme factorisée donne $(x - 4)(3x + 2) = 3x^2 + 2x - 12x - 8 = 3x^2 - 10x - 8$ ✓

c) Par la règle du produit nul :

$$x - 4 = 0 \implies x = 4 \quad \text{ou} \quad 3x + 2 = 0 \implies x = -\frac{2}{3}$$

$$S = \left\{ -\frac{2}{3}; 4 \right\}$$

Contrôle pour $x = 4$: $(8 - 1)^2 - (4 + 3)^2 = 49 - 49 = 0$ ✓

Le piège de la soustraction. Dans le premier crochet, le signe moins porte sur **toute** la parenthèse : $-(x + 3) = -x - 3$. C'est de loin l'erreur la plus fréquente sur ce type de factorisation.

Pourquoi factoriser plutôt que développer. La forme développée $3x^2 - 10x - 8$ ne se factorise pas de tête en Seconde. En passant par la différence de carrés, on obtient la factorisation **sans effort** — et donc les solutions.

La stratégie générale. Devant une différence de deux expressions au carré, on factorise **avant** de développer. Développer d'abord ferait perdre la structure qui rend l'exercice faisable.

Réponse. a) $A = (x - 4)(3x + 2)$ — b) les deux écritures donnent $3x^2 - 10x - 8$ ✓ — c) $S = \left\{-\frac{2}{3}; 4\right\}$.

Correction de l'exercice 2 - Une équation de degré 4

a) On développe le produit proposé :

$$(x^2 - 1)(x^2 - 4) = x^4 - 4x^2 - x^2 + 4 = x^4 - 5x^2 + 4 \quad \checkmark$$

b) Chaque facteur est lui-même une différence de carrés :

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) \quad x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

D'où la factorisation complète :

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$$

c) Par la règle du produit nul, étendue à quatre facteurs :

$$S = \{-2; -1; 1; 2\}$$

Contrôle pour $x = 2$: $16 - 20 + 4 = 0$ ✓ Pour $x = -1$: $1 - 5 + 4 = 0$ ✓

Le changement d'inconnue, en coulisses. En posant $X = x^2$, l'équation devient $X^2 - 5X + 4 = 0$, dont les solutions sont $X = 1$ et $X = 4$. Il reste alors à résoudre $x^2 = 1$ et $x^2 = 4$, ce qui donne bien **quatre** valeurs de x .

Le compte des solutions. Chaque valeur **positive** de X redonne deux valeurs opposées de x : deux valeurs de X donnent donc quatre valeurs de x . Si l'une des valeurs de X avait été négative, elle n'aurait rien donné.

Le contrôle du degré. Une équation de degré 4 a au plus **quatre** solutions. En trouver quatre distinctes signifie qu'on les a toutes ✓

La symétrie de l'ensemble. Les solutions vont par paires opposées, ce qui est normal : l'expression ne contient que des puissances **paires** de x , donc $f(-x) = f(x)$.

Réponse. a) le développement confirme — b) $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$ — c) $S = \{-2; -1; 1; 2\}$.

Correction de l'exercice 3 - Une expression toujours positive

a) On développe :

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = x^2 + x + 1 \quad \checkmark$$

(Le double produit vaut $2 \times x \times \frac{1}{2} = x$ ✓)

b) Le carré $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ est positif ou nul pour tout x . En ajoutant $\frac{3}{4}$:

$$f(x) \geq \frac{3}{4} > 0$$

L'expression est donc **strictement positive** pour tout réel, avec un minimum de $\frac{3}{4}$ atteint en $x = -\frac{1}{2}$.

c) L'équation $f(x) = 0$ n'a **aucune** solution, puisque $f(x) \geq \frac{3}{4} > 0$.

Pour l'inéquation $f(x) < 1$:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} < 1 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} < x + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} &\Leftrightarrow -1 < x < 0 \\ S &=]-1; 0[\end{aligned}$$

Contrôle : $f(-0,5) = 0,25 - 0,5 + 1 = 0,75 < 1 \checkmark$; $f(0) = 1$, donc l'inégalité stricte est fausse $\checkmark$; $f(-1) = 1 - 1 + 1 = 1$, idem $\checkmark$

Comment trouver cette forme canonique. On complète le carré : $x^2 + x$ est le début de $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$, donc $x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, et il reste $-\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$.

Pourquoi la factorisation est impossible. f ne s'annule jamais, donc aucune écriture $(x - x_1)(x - x_2)$ n'existe. La forme canonique est la **seule** qui permette de conclure ici.

La symétrie du résultat de c). L'intervalle $]-1; 0[$ est centré sur $-\frac{1}{2}$, l'abscisse du sommet $\checkmark$

Réponse. a) le développement redonne $x^2 + x + 1 \checkmark$ — b) $f(x) \geq \frac{3}{4} > 0$ — c) aucune solution pour $f(x) = 0$; $S =]-1; 0[$ pour $f(x) < 1$.

Correction de l'exercice 4 - Discuter selon un paramètre

a) Un carré ne peut pas être négatif, donc tout dépend du signe de m :

- **si** $m > 0$: deux solutions, $x = 2 + \sqrt{m}$ et $x = 2 - \sqrt{m}$;
- **si** $m = 0$: une seule solution, $x = 2$;
- **si** $m < 0$: aucune solution.

b) La solution est unique **uniquement pour** $m = 0$, et elle vaut alors $x = 2$.

C'est le cas limite entre deux solutions et aucune : les deux solutions symétriques se confondent au sommet.

c) **Pour** $m = 16$:

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 = 16 &\Leftrightarrow x - 2 = 4 \text{ ou } x - 2 = -4 \Leftrightarrow x = 6 \text{ ou } x = -2 \\ S &= \{-2; 6\} \end{aligned}$$

Contrôle : $(6 - 2)^2 = 16 \checkmark$ et $(-2 - 2)^2 = 16 \checkmark$

Pour $m = -4$: aucune solution, $S = \emptyset$.

L'interprétation graphique. La parabole $y = (x - 2)^2$ a son sommet en $(2; 0)$ et est tournée vers le haut. L'horizontale $y = m$ la coupe deux fois si $m > 0$, la touche une fois si $m = 0$, et ne la rencontre pas si $m < 0$.

La symétrie des solutions. Quand il y en a deux, elles sont toujours symétriques par rapport à 2 : leur milieu vaut $\frac{(2 + \sqrt{m}) + (2 - \sqrt{m})}{2} = 2 \checkmark$ C'est vrai pour toute valeur de $m > 0$.

Ce que la discussion apporte. Elle répond **pour toutes les valeurs de m à la fois**, là où un calcul ne traite qu'un cas. C'est le type de raisonnement que l'on retrouvera en Première avec le discriminant.

Réponse. a) deux solutions si $m > 0$, une si $m = 0$, aucune si $m < 0$ — b) $m = 0$, solution $x = 2$ — c) $S = \{-2; 6\}$ puis $S = \emptyset$.

Correction de l'exercice 5 - Une inéquation quotient et produit

Les valeurs remarquables sont les racines du numérateur, 1 et -2 , et la **valeur interdite** 3 qui annule le dénominateur. Rangées dans l'ordre croissant : -2 , 1, 3.

Intervalle	$] -\infty ; -2[$	$] -2 ; 1[$	$] 1 ; 3[$	$] 3 ; +\infty[$
Signe de $x - 1$	—	—	+	+
Signe de $x + 2$	—	+	+	+
Signe de $x - 3$	—	—	—	+
Signe du quotient	—	+	—	+

On cherche où le quotient est **négatif ou nul** :

- les intervalles $] -\infty ; -2[$ et $] 1 ; 3[$ conviennent ;
- $x = -2$ et $x = 1$ **annulent** le numérateur : inégalité large, donc **inclus** ;
- $x = 3$ est la valeur interdite : **exclu**.

$$S =] -\infty ; -2] \cup [1 ; 3[$$

Le contrôle par quatre points tests. $x = -3 : \frac{(-4)(-1)}{-6} = -\frac{2}{3} < 0 \checkmark$; $x = 0 : \frac{(-1)(2)}{-3} = \frac{2}{3} > 0 \checkmark$; $x = 2 : \frac{(1)(4)}{-1} = -4 < 0 \checkmark$; $x = 4 : \frac{(3)(6)}{1} = 18 > 0 \checkmark$

La difficulté de cet exercice. Trois lignes de signes, et surtout un **mélange** de racines du numérateur et d'une valeur interdite dans la même ligne d'en-tête. Les ranger dans l'ordre croissant, sans distinction de nature, est l'étape décisive.

Le soin des crochets, une dernière fois. Trois bornes, trois traitements : -2 fermé, 1 fermé, 3 ouvert. La nature de chaque valeur — racine du numérateur ou valeur interdite — se décide **borne par borne**.

Pourquoi on ne multiplie pas par $x - 3$. Son signe change en 3 : la multiplication conserverait le sens de l'inégalité à droite et l'inverserait à gauche. Le tableau de signes évite entièrement cette discussion.

Réponse. $S =] -\infty ; -2] \cup [1 ; 3[$.

Correction de l'exercice 6 - Comparer un carré et un produit

a) On développe le membre de gauche :

$$(x + 1)^2 - 4x = x^2 + 2x + 1 - 4x = x^2 - 2x + 1$$

et l'on reconnaît le développement de $(x - 1)^2 \checkmark$

b) Un carré est toujours positif ou nul, donc

$$(x + 1)^2 - 4x = (x - 1)^2 \geq 0$$

d'où, en ajoutant $4x$ aux deux membres :

$$(x + 1)^2 \geq 4x \quad \text{pour tout réel } x$$

c) L'égalité a lieu lorsque $(x - 1)^2 = 0$, c'est-à-dire pour

$$x = 1$$

Contrôle : $(1 + 1)^2 = 4$ et $4 \times 1 = 4$ ✓ égaux. Pour $x = 3$: $16 > 12$ ✓ Pour $x = 0$: $1 > 0$ ✓
Pour $x = -2$: $1 > -8$ ✓

La méthode employée. Pour comparer deux expressions, on étudie le **signe de leur différence** — et ici, la différence se révèle être un **carré**, donc de signe connu sans aucun tableau.

Pourquoi c'est élégant. Aucun tableau de signes, aucune racine à chercher : la seule reconnaissance d'une identité remarquable suffit à démontrer une inégalité **valable pour tous les réels**. C'est le type de raisonnement attendu en démonstration.

Le sens de cette inégalité. En posant $a = x$ et $b = 1$, elle s'écrit $(a + b)^2 \geq 4ab$, une inégalité classique valable pour tous réels. Elle traduit qu'à somme fixée, le produit de deux nombres est maximal quand ils sont égaux — le résultat de l'exercice 7 de la plaquette précédente.

Le réflexe à retenir. Si la différence de deux expressions se met sous forme de carré, l'inégalité est démontrée immédiatement, et le cas d'égalité se lit sur l'annulation du carré.

Réponse. a) les deux membres valent $x^2 - 2x + 1$ ✓ — b) $(x + 1)^2 \geq 4x$ pour tout réel — c) égalité uniquement pour $x = 1$.

Correction de l'exercice 7 - Un rectangle imposé

a) Le périmètre valant 24 cm, la somme des deux dimensions vaut 12 cm. Si l'une mesure x , l'autre mesure $12 - x$, et l'aire s'écrit

$$x(12 - x) = 35 \Leftrightarrow 12x - x^2 = 35 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 35 = 0$$

avec $0 < x < 12$.

b) On développe :

$$(x - 5)(x - 7) = x^2 - 7x - 5x + 35 = x^2 - 12x + 35 \quad \checkmark$$

c) Par la règle du produit nul : $x = 5$ ou $x = 7$. Les deux valeurs conviennent et décrivent **le même** rectangle, simplement posé dans l'autre sens.

Le rectangle mesure donc **5 cm sur 7 cm**. Contrôle : périmètre $2(5 + 7) = 24$ cm ✓ et aire 35 cm² ✓

d) On chercherait $x(12 - x) = 40$, soit

$$x^2 - 12x + 40 = 0 \Leftrightarrow (x - 6)^2 - 36 + 40 = 0 \Leftrightarrow (x - 6)^2 = -4$$

ce qui est **impossible**. Aucun rectangle de périmètre 24 cm n'a une aire de 40 cm².

L'explication. À périmètre fixé, l'aire est **maximale** pour le carré, ici de côté 6 cm, donc d'aire 36 cm². On ne peut pas dépasser 36 cm² : la demande de 40 cm² est hors d'atteinte.

La forme canonique employée. $x(12 - x) = 36 - (x - 6)^2$, ce qui donne à la fois le maximum (36 cm² en $x = 6$) et la réponse à la question d) sans le moindre tableau.

Le cas des deux solutions identiques en substance. En c), 5 et 7 ne sont pas deux rectangles différents : c'est le même, avec longueur et largeur échangées. Il faut le dire, plutôt que de rejeter arbitrairement l'une des deux valeurs.

La cohérence d'ensemble. $35 < 36$: l'aire demandée en c) est atteignable, et de peu. $40 > 36$: celle de d) ne l'est pas. Le maximum de 36 cm² départage les deux questions ✓

Réponse. a) l'autre dimension vaut $12 - x$, et $x^2 - 12x + 35 = 0$ — b) le développement

confirme — c) 5 cm sur 7 cm — d) non : l'aire maximale à périmètre 24 cm est 36 cm².

Correction de l'exercice 8 - Un triangle rectangle à trouver

a) Le théorème de Pythagore s'écrit « le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés » :

$$x^2 + (x + 7)^2 = (x + 8)^2$$

On développe les deux carrés :

$$x^2 + x^2 + 14x + 49 = x^2 + 16x + 64$$

$$2x^2 + 14x + 49 = x^2 + 16x + 64$$

et l'on ramène tout dans le même membre :

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

b) On développe la factorisation proposée :

$$(x - 5)(x + 3) = x^2 + 3x - 5x - 15 = x^2 - 2x - 15 \quad \checkmark$$

c) Par la règle du produit nul : $x = 5$ ou $x = -3$. Une longueur étant strictement positive, on retient $x = 5$ cm.

Les trois côtés mesurent donc

$$5 \text{ cm}, \quad 12 \text{ cm}, \quad 13 \text{ cm}$$

Contrôle par Pythagore : $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$ et $13^2 = 169 \quad \checkmark$ Le triangle est bien rectangle.

Le triplet obtenu. (5 ; 12 ; 13) est un **triplet pythagoricien** classique, au même titre que (3 ; 4 ; 5) ou (8 ; 15 ; 17). Le reconnaître permet de contrôler le résultat d'un coup d'œil.

Le point technique de la question a). Un terme x^2 apparaît des deux côtés et se **simplifie** : l'équation, qui semblait du second degré avec trois carrés, se réduit à une équation du second degré ordinaire. Ne pas simplifier ne serait pas faux, mais compliquerait la suite.

Le tri final. La solution -3 est écartée pour une raison géométrique, pas algébrique. La phrase « une longueur est strictement positive » fait partie de la réponse.

Réponse. a) $x^2 + (x + 7)^2 = (x + 8)^2$, soit $x^2 - 2x - 15 = 0$ — b) le développement confirme — c) les côtés mesurent 5, 12 et 13 cm.

Correction de l'exercice 9 - Une inéquation avec un inverse

⚠ **On ne multiplie pas par x** : son signe est inconnu. On ramène tout d'un côté et on réduit au même dénominateur.

$$\frac{1}{x} \geq x \Leftrightarrow \frac{1}{x} - x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - x^2}{x} \geq 0$$

Le numérateur se factorise comme une différence de carrés :

$$1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$$

Les valeurs remarquables sont -1 , 0 (valeur interdite) et 1 .

Intervalle	$] -\infty ; -1[$	$] -1 ; 0[$	$] 0 ; 1[$	$] 1 ; +\infty[$
Signe de $1 - x$	+	+	+	–
Signe de $1 + x$	–	+	+	+
Signe de x	–	–	+	+
Signe du quotient	+	–	+	–

On cherche où le quotient est **positif ou nul**. Les valeurs -1 et 1 annulent le numérateur et sont **incluses** ; la valeur 0 est **exclue** :

$$S =]-\infty ; -1] \cup]0 ; 1]$$

Le contrôle par quatre points tests. $x = -2 : -0,5 \geq -2 \checkmark$; $x = -0,5 : -2 \geq -0,5$ est **faux** $\checkmark$; $x = 0,5 : 2 \geq 0,5 \checkmark$; $x = 2 : 0,5 \geq 2$ est **faux** $\checkmark$

Le piège du facteur $1 - x$. Son coefficient de x est **négatif** : il est positif avant 1 et négatif après. Le traiter comme $x - 1$ inverserait toute la ligne, et donc le résultat final.

Ce que donnerait la multiplication par x . On obtiendrait $1 \geq x^2$, soit $-1 \leq x \leq 1$ — un ensemble qui contient des valeurs fausses ($x = -0,5$) et qui manque toute la partie $x < -1$. L'erreur est donc double.

La lecture graphique. C'est la comparaison de l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ et de la droite $y = x$, qui se coupent en $(-1 ; -1)$ et $(1 ; 1)$. L'hyperbole est au-dessus sur la branche de gauche lointaine et entre 0 et $1 \checkmark$

Réponse. $S =]-\infty ; -1] \cup]0 ; 1]$.

Correction de l'exercice 10 - Un encadrement à double condition

Un encadrement est un **système** de deux inéquations : on résout chacune, puis on prend l'**intersection** des deux ensembles.

Première inéquation : $x^2 \geq 1$, soit $x^2 - 1 \geq 0$, soit $(x - 1)(x + 1) \geq 0$. Le produit est positif à l'extérieur des racines :

$$S_1 =]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$$

Seconde inéquation : $x^2 \leq 9$, soit $(x - 3)(x + 3) \leq 0$. Le produit est négatif entre les racines :

$$S_2 = [-3 ; 3]$$

L'intersection. On garde les nombres qui appartiennent aux **deux** ensembles :

$$S = S_1 \cap S_2 = [-3 ; -1] \cup [1 ; 3]$$

Le contrôle par cinq points tests. $x = -4 : 16 > 9$, exclu $\checkmark$; $x = -2 : 1 \leq 4 \leq 9 \checkmark$; $x = 0 : 0 < 1$, exclu $\checkmark$; $x = 2 : 1 \leq 4 \leq 9 \checkmark$; $x = 5 : 25 > 9$, exclu $\checkmark$

L'interprétation. La condition $1 \leq x^2 \leq 9$ signifie que la **distance de x à zéro** est comprise entre 1 et 3 . D'où deux intervalles symétriques, un de chaque côté de l'origine.

L'erreur à éviter. Écrire directement « $1 \leq x \leq 3$ » en prenant la racine des trois membres. Cela oublie entièrement la partie négative, soit la moitié des solutions.

Pourquoi on résout séparément. Un encadrement dont le membre central n'est pas monotone sur tout l'axe — c'est le cas de x^2 — ne se traite pas d'un bloc. Deux inéquations, deux ensembles, puis l'intersection : c'est la seule démarche sûre.

La forme du résultat. Deux intervalles fermés, symétriques par rapport à 0 : c'est la signature d'un encadrement de carré à deux bornes positives.

Réponse. $S = [-3 ; -1] \cup [1 ; 3]$.

Correction de l'exercice 11 - Un signe avec un coefficient négatif

a) On développe d'abord le produit, puis on multiplie par -2 :

$$(x-1)(x+3) = x^2 + 3x - x - 3 = x^2 + 2x - 3$$

$$g(x) = -2(x^2 + 2x - 3) = -2x^2 - 4x + 6$$

b) Les racines sont 1 et -3 . Le facteur constant -2 est **négatif** et ne dépend pas de x : il inverse le signe du produit sur tout l'axe.

Intervalle	$] -\infty ; -3[$	$] -3 ; 1[$	$] 1 ; +\infty[$
Signe de $x - 1$	$-$	$-$	$+$
Signe de $x + 3$	$-$	$+$	$+$
Signe de $(x - 1)(x + 3)$	$+$	$-$	$+$
Signe de $g(x)$	$-$	$+$	$-$

c) On cherche où $g(x)$ est **strictement positif** : c'est l'intervalle **entre** les racines, bornes exclues.

$$S =]-3 ; 1[$$

Le contrôle par trois points tests. $x = -4$: $-2 \times (-5)(-1) = -10 < 0 \checkmark$; $x = 0$: $-2 \times (-1)(3) = 6 > 0 \checkmark$; $x = 2$: $-2 \times (1)(5) = -10 < 0 \checkmark$

La comparaison demandée. Avec un coefficient **positif**, $2(x-1)(x+3)$ serait positive à **l'extérieur** des racines et négative entre elles. Le signe négatif **inverse tout** : positive entre, négative à l'extérieur.

La règle à retenir. Pour $a(x-x_1)(x-x_2)$, l'expression est du signe de a à **l'extérieur** des racines, et du signe contraire **entre** elles. C'est la formulation générale, valable dans les deux cas.

L'interprétation graphique. Avec $a < 0$, la parabole est tournée vers le **bas** : elle est au-dessus de l'axe entre ses deux racines et en dessous ailleurs. Le sommet, ici en $(-1 ; 8)$, est un **maximum**.

Le contrôle par le sommet. L'abscisse du sommet est le milieu des racines : $\frac{-3+1}{2} = -1$, et $g(-1) = -2 \times (-2)(2) = 8 \checkmark$ Ce point est bien dans la zone positive.

Réponse. a) $g(x) = -2x^2 - 4x + 6$ — b) négatif, positif, négatif — c) $S =]-3 ; 1[$; avec un coefficient positif, ce serait exactement l'ensemble complémentaire.

Correction de l'exercice 12 - Deux nombres à retrouver

a) Si l'un vaut x , l'autre vaut $7 - x$. Leur produit vaut 12 :

$$x(7-x) = 12 \Leftrightarrow 7x - x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$$

b) On développe :

$$(x-3)(x-4) = x^2 - 4x - 3x + 12 = x^2 - 7x + 12 \checkmark$$

c) Par la règle du produit nul : $x = 3$ ou $x = 4$. Les deux valeurs décrivent **le même couple**, dans un ordre ou dans l'autre.

Les deux nombres sont donc 3 **et** 4. Contrôle : $3 + 4 = 7 \checkmark$ et $3 \times 4 = 12 \checkmark$

d) On chercherait $x(7-x) = 15$, soit $x^2 - 7x + 15 = 0$. Écrivons la forme canonique :

$$x^2 - 7x + 15 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 15 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$$

Cette expression est **strictement positive** pour tout réel (somme d'un carré et de $\frac{11}{4} > 0$) : l'équation n'a aucune solution.

Il n'existe donc **aucun** couple de nombres de somme 7 et de produit 15.

L'explication. À somme fixée à 7, le produit est **maximal** quand les deux nombres sont égaux à 3,5, et il vaut alors $3,5^2 = 12,25$. Le produit demandé, 15, dépasse ce maximum : c'est impossible.

Le contrôle du calcul canonique. $-\frac{49}{4} + 15 = -12,25 + 15 = 2,75 = \frac{11}{4} \checkmark$ Et l'on retrouve bien le maximum du produit : 12,25.

La cohérence avec c). Le produit demandé était $12 < 12,25$: atteignable, et de peu — d'où deux solutions proches de 3,5, à savoir 3 et 4 $\checkmark$

La leçon. Un problème peut être **sans solution**, et le montrer proprement (par la forme canonique, ou par un argument de maximum) vaut autant qu'une résolution.

Réponse. a) l'autre vaut $7 - x$, et $x^2 - 7x + 12 = 0$ — b) le développement confirme — c) 3 et 4 — d) non : le produit maximal à somme 7 vaut 12,25.

Correction de l'exercice 13 - Une parabole et un paramètre

Couper l'axe des abscisses revient à résoudre $f_m(x) = 0$, soit

$$(x - 2)^2 + m = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = -m$$

a) Il y a **deux** points d'intersection lorsque $-m > 0$, c'est-à-dire

$$m < 0$$

Les abscisses sont alors $2 + \sqrt{-m}$ et $2 - \sqrt{-m}$.

b) Il n'y a **aucun** point d'intersection lorsque $-m < 0$, c'est-à-dire

$$m > 0$$

(Et pour $m = 0$, la courbe **touche** l'axe en un seul point, le sommet (2 ; 0).)

c) Pour $m = -9$:

$$(x - 2)^2 = 9 \Leftrightarrow x - 2 = 3 \text{ ou } x - 2 = -3 \Leftrightarrow x = 5 \text{ ou } x = -1$$

La courbe coupe l'axe aux points (-1 ; 0) et (5 ; 0).

Contrôle : $f_{-9}(5) = 9 - 9 = 0 \checkmark$ et $f_{-9}(-1) = 9 - 9 = 0 \checkmark$

L'interprétation géométrique. m est l'**ordonnée du sommet** : la parabole $y = (x - 2)^2$ est simplement translatée verticalement de m . Si le sommet descend sous l'axe ($m < 0$), la parabole le traverse deux fois ; s'il monte au-dessus ($m > 0$), elle ne le rencontre plus.

Le piège du signe. L'équation donne $(x - 2)^2 = -m$, et non $= m$. Une valeur **négative** de m produit donc un second membre **positif**. Confondre les deux inverse toute la discussion.

Le contrôle sur un cas. Pour $m = 4$ (positif), $f_4(x) = (x - 2)^2 + 4 \geq 4 > 0$: la courbe est entièrement au-dessus de l'axe $\checkmark$ conforme à la réponse b).

La symétrie des points d'intersection. Ils sont toujours symétriques par rapport à $x = 2$: $\frac{-1+5}{2} = 2 \checkmark$ quelle que soit la valeur de m .

Réponse. a) pour $m < 0$ — b) pour $m > 0$ (et un seul point si $m = 0$) — c) les points (-1 ; 0) et (5 ; 0).

Correction de l'exercice 14 - Une équation produit déguisée

⚠ **On ne simplifie pas par** $(x - 3)$: ce facteur peut être nul, et on perdrait la solution correspondante. On ramène tout d'un côté et on factorise.

$$(x - 3)(x + 1) - (x - 3)(2x - 5) = 0$$

Le facteur commun est $(x - 3)$:

$$(x - 3)[(x + 1) - (2x - 5)] = 0$$

On réduit le crochet, en prenant garde au signe moins :

$$(x + 1) - (2x - 5) = x + 1 - 2x + 5 = -x + 6$$

D'où

$$(x - 3)(-x + 6) = 0$$

Par la règle du produit nul :

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \quad \text{ou} \quad -x + 6 = 0 \Rightarrow x = 6$$

$$S = \{3; 6\}$$

Contrôle pour $x = 3$: les deux membres valent $0 \times 4 = 0$ et $0 \times 1 = 0$ ✓

Contrôle pour $x = 6$: à gauche $3 \times 7 = 21$, à droite $3 \times 7 = 21$ ✓

Ce que donnerait la simplification interdite. En « divisant » par $(x - 3)$, on obtiendrait $x + 1 = 2x - 5$, soit $x = 6$ — en perdant la solution $x = 3$. Exactement le même mécanisme que la division par x , avec une expression à la place de la lettre.

Pourquoi $x = 3$ est solution. Parce qu'elle annule le facteur commun : les deux membres valent alors 0, quels que soient les autres facteurs. C'est une solution « gratuite », que la factorisation révèle et que la simplification efface.

Le piège du signe, encore. $-(2x - 5) = -2x + 5$: les **deux** termes changent de signe. Une erreur ici change la seconde solution sans toucher la première, ce qui rend la faute difficile à repérer sans contrôle.

Le réflexe général. Dès qu'une même parenthèse apparaît des deux côtés d'une égalité, on la garde comme **facteur commun** : c'est toujours plus rapide que de tout développer, et cela ne perd aucune solution.

Réponse. $S = \{3; 6\}$ — il ne faut surtout pas simplifier par $(x - 3)$, qui peut être nul.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : un problème complet

a) On développe :

$$-(x - 20)^2 + 225 = -(x^2 - 40x + 400) + 225 = -x^2 + 40x - 400 + 225 = -x^2 + 40x - 175 \quad \checkmark$$

b) Le carré étant positif ou nul, $-(x - 20)^2$ est négatif ou nul :

$$B(x) \leq 225 \quad \text{avec égalité pour } x = 20$$

Le bénéfice maximal est de 225 €, atteint pour une production de 20 **articles**.

c) On développe la factorisation proposée :

$$-(x - 5)(x - 35) = -(x^2 - 35x - 5x + 175) = -(x^2 - 40x + 175) = -x^2 + 40x - 175 \quad \checkmark$$

Les racines sont donc 5 et 35. Le coefficient de x^2 étant **négatif**, l'expression est positive **entre** les racines :

Intervalle	$[0 ; 5[$	$]5 ; 35[$	$]35 ; 50]$
Signe de $B(x)$	–	+	–

L'entreprise est rentable pour une production **strictement comprise entre 5 et 35 articles**.

d) On résout $B(x) \geq 200$ à partir de la forme canonique :

$$-(x - 20)^2 + 225 \geq 200 \Leftrightarrow -(x - 20)^2 \geq -25 \Leftrightarrow (x - 20)^2 \leq 25$$

(la multiplication par -1 **inverse** le sens de l'inégalité), puis

$$-5 \leq x - 20 \leq 5 \Leftrightarrow 15 \leq x \leq 25$$

Les entiers de 15 à 25 inclus sont au nombre de $25 - 15 + 1 = \mathbf{11}$.

Contrôle : $B(15) = -225 + 600 - 175 = 200 \checkmark$; $B(20) = 225 \checkmark$;
 $B(26) = -676 + 1\,040 - 175 = 189 < 200 \checkmark$

La cohérence de l'ensemble. L'intervalle $[15 ; 25]$ est centré sur 20 $\checkmark$ et il est contenu dans la zone de rentabilité $]5 ; 35[\checkmark$ dont le milieu est aussi 20 $\checkmark$

Le choix de la forme, question par question. Canonique pour l'extremum (b) et pour l'inéquation $B(x) \geq k$ (d) ; factorisée pour le signe et les seuils (c). Développée pour $B(0) = -175$ €, la perte à production nulle.

Le bilan des cinq plaquettes. Factoriser pour résoudre, tableau de signes pour les inéquations, forme canonique pour les extremums et les équations $f(x) = k$ — et, dans un problème concret, **toujours** revenir au contexte : domaine, unité, arrondi, tri des solutions.

Réponse. a) le développement redonne $-x^2 + 40x - 175 \checkmark$ — b) 225 € pour 20 articles — c) rentable pour $5 < x < 35$ — d) $15 \leq x \leq 25$, soit 11 productions entières.