Plaquette 3 – Formes et transformations

Équations et inéquations du second degré — Seconde

Exercices

Méthode

Une même expression du second degré s'écrit de trois façons, et chacune répond à une question différente. La forme **développée** $ax^2 + bx + c$ donne l'image de 0 d'un coup d'œil. La forme **factorisée** $a(x - x_1)(x - x_2)$ donne les **racines** et permet le tableau de signes. La forme **canonique** $a(x - \alpha)^2 + \beta$ donne le **sommet** de la parabole, donc l'extremum. Elles décrivent exactement le même objet : passer de l'une à l'autre se fait par développement, par factorisation ou par identité remarquable, et l'on contrôle toujours en redéveloppant. La vraie compétence n'est pas de savoir transformer, c'est de savoir **quelle forme choisir** : devant une question, on se demande d'abord laquelle des trois répond en une ligne.

Exercice 1 – Développer trois produits

Développer et réduire.

$$A = (x - 3)(x + 5) \qquad B = (2x - 1)(x + 4) \qquad C = (x + 3)^2$$

Exercice 2 – Factoriser trois expressions

Factoriser.

$$D = x^2 - 16 \qquad E = x^2 + 8x \qquad F = x^2 - 10x + 25$$

Préciser à chaque fois la technique employée.

Exercice 3 – Trois écritures d'une même fonction

Soit f définie par $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

a) Vérifier que $f(x) = (x - 2)^2 - 1$.

b) Vérifier que $f(x) = (x - 1)(x - 3)$.

c) Calculer $f(0)$, $f(2)$ et $f(5)$ en choisissant à chaque fois la forme la plus commode.

Exercice 4 – Choisir la bonne forme

Une fonction g s'écrit sous trois formes :

$$g(x) = 2x^2 - 12x + 10 \qquad g(x) = 2(x - 3)^2 - 8 \qquad g(x) = 2(x - 1)(x - 5)$$

Pour chacune des questions suivantes, indiquer quelle forme utiliser, puis répondre.

a) Calculer $g(0)$.

b) Résoudre $g(x) = 0$.

c) Déterminer le minimum de g et la valeur où il est atteint.

d) Étudier le signe de $g(x)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – De la canonique à la factorisée

Soit $h(x) = (x-2)^2 - 9$.

a) Développer $h(x)$.

b) Factoriser $h(x)$ à l'aide de l'identité $a^2 - b^2$.

c) En déduire les racines de h, puis son minimum.

Exercice 6 – Compléter le carré

On souhaite écrire $k(x) = x^2 + 6x + 5$ sous forme canonique.

a) Vérifier que $x^2 + 6x = (x+3)^2 - 9$.

b) En déduire la forme canonique de $k(x)$.

c) En déduire le minimum de k, puis une factorisation de $k(x)$.

Exercice 7 – Lire un sommet

Pour chacune des fonctions suivantes, données sous forme canonique, préciser les coordonnées du sommet de la parabole et la nature de l'extremum.

$f_1(x) = (x-4)^2 + 2$ $\quad f_2(x) = -(x+1)^2 + 5$ $\quad f_3(x) = 3(x-2)^2$ $\quad f_4(x) = (x+3)^2 - 7$

Exercice 8 – Combien de racines ?

Sans calcul de racines, déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ pour chacune des fonctions suivantes, en justifiant.

$f_1(x) = (x-1)^2 + 4$ $\quad f_2(x) = (x+2)^2 - 9$ $\quad f_3(x) = (x-5)^2$ $\quad f_4(x) = -(x-3)^2 - 1$

Exercice 9 – Avec un coefficient devant le carré

Soit $m(x) = 2(x-1)^2 + 3$.

a) Développer $m(x)$.

b) Déterminer le sommet de la parabole et le minimum de m.

c) Calculer $m(0)$, $m(1)$ et $m(2)$. Que remarque-t-on sur $m(0)$ et $m(2)$?

Exercice 10 – Compléter un tableau de formes

Compléter le tableau ci-dessous, chaque ligne décrivant une même fonction.

Développée	Canonique	Factorisée
$x^2 - 6x + 8$	$(x-3)^2 - 1$	?
?	$(x+1)^2 - 16$	?
$x^2 - 2x$	?	$x(x-2)$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

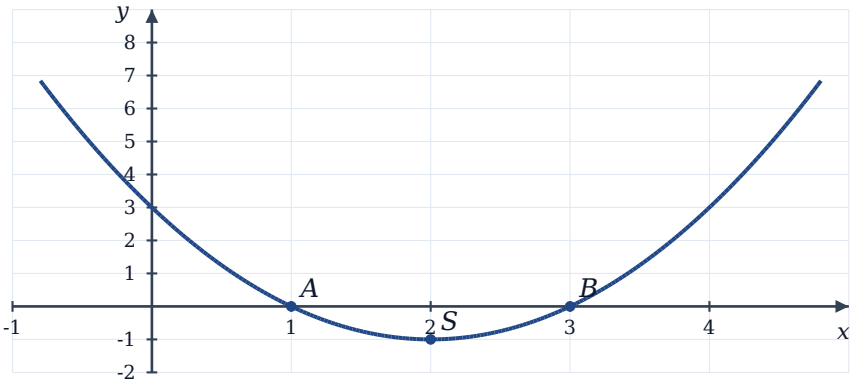
Exercice 11 – Reconnaître une courbe

La courbe ci-dessous est celle d'une fonction f du second degré.

a) Lire les racines et le sommet.

b) En déduire une forme factorisée puis une forme canonique de $f(x)$, sachant que le coefficient a vaut 1.

c) Vérifier la cohérence des deux formes par développement.



Une parabole, ses racines et son sommet.

Exercice 12 – Une expression sans forme factorisée

Soit $p(x) = (x - 1)^2 + 2$.

a) Développer $p(x)$.

b) Montrer que $p(x) > 0$ pour tout réel x.

c) Peut-on factoriser $p(x)$ sous la forme $(x - x_1)(x - x_2)$? Justifier.

Exercice 13 – Résoudre avec la forme canonique

On donne $q(x) = x^2 - 8x + 7$ et l'on admet que $q(x) = (x - 4)^2 - 9$.

a) Vérifier cette forme canonique.

b) Résoudre $q(x) = 0$ en utilisant la forme canonique.

c) Résoudre $q(x) = -5$.

Exercice 14 – Utiliser la symétrie

Soit $r(x) = (x - 5)^2 + 1$.

a) Sans calcul, comparer $r(3)$ et $r(7)$.

b) Calculer $r(3)$ pour vérifier.

c) Trouver deux nombres différents ayant la même image 17 par r.

Exercice 15 – Synthèse : une fonction sous toutes ses formes

Soit $f(x) = x^2 - 10x + 21$.

a) Vérifier que $f(x) = (x - 5)^2 - 4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) En déduire une forme factorisée de $f(x)$.

c) Déterminer le sommet, les racines et $f(0)$.

d) Résoudre $f(x) \leq 0$, puis $f(x) = 5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).