

Plaquette 3 - Formes et transformations

Équations et inéquations du second degré — Seconde

Exercices

Méthode

Une même expression du second degré s'écrit de trois façons, et chacune répond à une question différente. La forme **développée** $ax^2 + bx + c$ donne l'image de 0 d'un coup d'œil. La forme **factorisée** $a(x - x_1)(x - x_2)$ donne les **racines** et permet le tableau de signes. La forme **canonique** $a(x - \alpha)^2 + \beta$ donne le **sommet** de la parabole, donc l'extremum. Elles décrivent exactement le même objet : passer de l'une à l'autre se fait par développement, par factorisation ou par identité remarquable, et l'on contrôle toujours en redéveloppant. La vraie compétence n'est pas de savoir transformer, c'est de savoir **quelle forme choisir** : devant une question, on se demande d'abord laquelle des trois répond en une ligne.

Exercice 1 - Développer trois produits

Développer et réduire.

$$A = (x - 3)(x + 5) \quad B = (2x - 1)(x + 4) \quad C = (x + 3)^2$$

Exercice 2 - Factoriser trois expressions

Factoriser.

$$D = x^2 - 16 \quad E = x^2 + 8x \quad F = x^2 - 10x + 25$$

Préciser à chaque fois la technique employée.

Exercice 3 - Trois écritures d'une même fonction

Soit f définie par $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

a) Vérifier que $f(x) = (x - 2)^2 - 1$.

b) Vérifier que $f(x) = (x - 1)(x - 3)$.

c) Calculer $f(0)$, $f(2)$ et $f(5)$ en choisissant à chaque fois la forme la plus commode.

Exercice 4 - Choisir la bonne forme

Une fonction g s'écrit sous trois formes :

$$g(x) = 2x^2 - 12x + 10 \quad g(x) = 2(x - 3)^2 - 8 \quad g(x) = 2(x - 1)(x - 5)$$

Pour chacune des questions suivantes, indiquer quelle forme utiliser, puis répondre.

a) Calculer $g(0)$.

b) Résoudre $g(x) = 0$.

c) Déterminer le minimum de g et la valeur où il est atteint.

d) Étudier le signe de $g(x)$.

Exercice 5 - De la canonique à la factorisée

Soit $h(x) = (x - 2)^2 - 9$.

- Développer $h(x)$.
- Factoriser $h(x)$ à l'aide de l'identité $a^2 - b^2$.
- En déduire les racines de h , puis son minimum.

Exercice 6 - Compléter le carré

On souhaite écrire $k(x) = x^2 + 6x + 5$ sous forme canonique.

- Vérifier que $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$.
- En déduire la forme canonique de $k(x)$.
- En déduire le minimum de k , puis une factorisation de $k(x)$.

Exercice 7 - Lire un sommet

Pour chacune des fonctions suivantes, données sous forme canonique, préciser les coordonnées du sommet de la parabole et la nature de l'extremum.

$$f_1(x) = (x - 4)^2 + 2 \quad f_2(x) = -(x + 1)^2 + 5 \quad f_3(x) = 3(x - 2)^2 \quad f_4(x) = (x + 3)^2 - 7$$

Exercice 8 - Combien de racines ?

Sans calcul de racines, déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ pour chacune des fonctions suivantes, en justifiant.

$$f_1(x) = (x - 1)^2 + 4 \quad f_2(x) = (x + 2)^2 - 9 \quad f_3(x) = (x - 5)^2 \quad f_4(x) = -(x - 3)^2 - 1$$

Exercice 9 - Avec un coefficient devant le carré

Soit $m(x) = 2(x - 1)^2 + 3$.

- Développer $m(x)$.
- Déterminer le sommet de la parabole et le minimum de m .
- Calculer $m(0)$, $m(1)$ et $m(2)$. Que remarque-t-on sur $m(0)$ et $m(2)$?

Exercice 10 - Compléter un tableau de formes

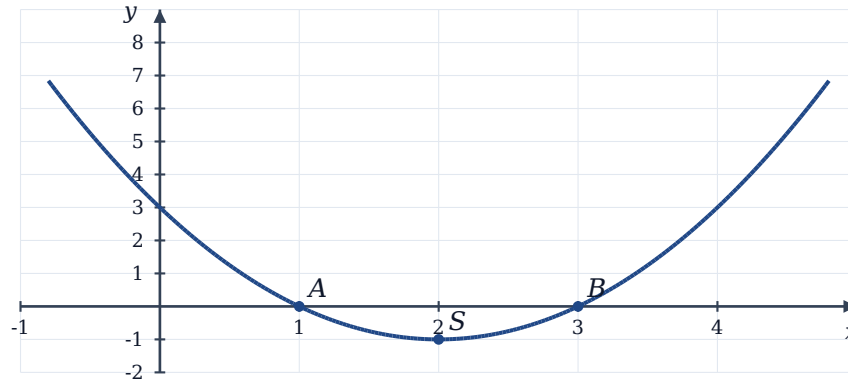
Compléter le tableau ci-dessous, chaque ligne décrivant une même fonction.

Développée	Canonique	Factorisée
$x^2 - 6x + 8$	$(x - 3)^2 - 1$	?
?	$(x + 1)^2 - 16$	?
$x^2 - 2x$	?	$x(x - 2)$

Exercice 11 - Reconnaître une courbe

La courbe ci-dessous est celle d'une fonction f du second degré.

- Lire les racines et le sommet.
- En déduire une forme factorisée puis une forme canonique de $f(x)$, sachant que le coefficient a vaut 1.
- Vérifier la cohérence des deux formes par développement.



Une parabole, ses racines et son sommet.

Exercice 12 - Une expression sans forme factorisée

Soit $p(x) = (x - 1)^2 + 2$.

- Développer $p(x)$.
- Montrer que $p(x) > 0$ pour tout réel x .
- Peut-on factoriser $p(x)$ sous la forme $(x - x_1)(x - x_2)$? Justifier.

Exercice 13 - Résoudre avec la forme canonique

On donne $q(x) = x^2 - 8x + 7$ et l'on admet que $q(x) = (x - 4)^2 - 9$.

- Vérifier cette forme canonique.
- Résoudre $q(x) = 0$ en utilisant la forme canonique.
- Résoudre $q(x) = -5$.

Exercice 14 - Utiliser la symétrie

Soit $r(x) = (x - 5)^2 + 1$.

- Sans calcul, comparer $r(3)$ et $r(7)$.
- Calculer $r(3)$ pour vérifier.
- Trouver deux nombres différents ayant la même image 17 par r .

Exercice 15 - Synthèse : une fonction sous toutes ses formes

Soit $f(x) = x^2 - 10x + 21$.

- Vérifier que $f(x) = (x - 5)^2 - 4$.

- b) En déduire une forme factorisée de $f(x)$.
- c) Déterminer le sommet, les racines et $f(0)$.
- d) Résoudre $f(x) \leq 0$, puis $f(x) = 5$.