

Plaquette 4 – Modélisation

Équations et inéquations du second degré — Seconde

Exercices

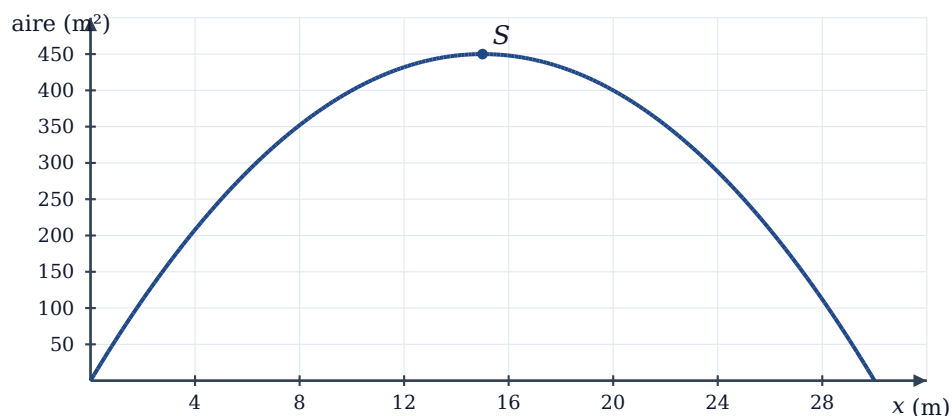
Méthode

Le second degré apparaît chaque fois qu'une grandeur dépend d'un **produit de deux quantités qui varient ensemble** : une aire dont les deux dimensions bougent, une recette (prix $\times$ quantité vendue) quand la quantité dépend du prix, une trajectoire soumise à la pesanteur. La démarche est toujours la même. On **nomme** l'inconnue et on précise son domaine — une longueur est positive, une quantité vendue aussi. On **exprime** la grandeur étudiée en fonction de cette inconnue, en développant. Puis on choisit : la forme **factorisée** pour chercher où la grandeur s'annule, la forme **canonique** — fournie par l'énoncé et à vérifier — pour trouver le **maximum** ou le minimum. Et l'on termine toujours par un **retour au contexte** : unité, arrondi, et élimination des solutions que la situation interdit.

Exercice 1 – Un enclos contre un mur

Un éleveur dispose de 60 mètres de grillage pour délimiter un enclos rectangulaire **adossé à un mur** : seuls trois côtés sont à clôturer. On note x la largeur, en mètres, des deux côtés perpendiculaires au mur.

- Exprimer la longueur du troisième côté, puis l'aire $A(x)$ de l'enclos.
- Vérifier que $A(x) = 450 - 2(x - 15)^2$.
- En déduire les dimensions de l'enclos d'aire maximale, et cette aire.



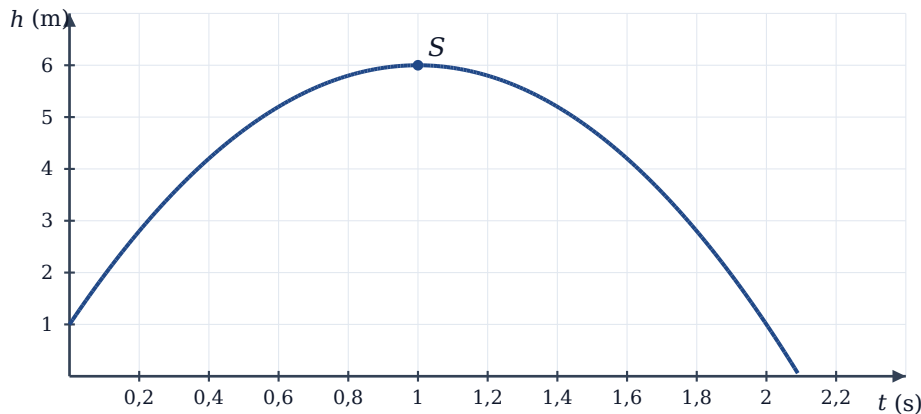
Aire de l'enclos selon la largeur.

Exercice 2 - La trajectoire d'un ballon

Un ballon est lancé depuis une hauteur de 1 mètre. Sa hauteur, en mètres, t secondes après le lancer, est donnée par

$$h(t) = -5t^2 + 10t + 1$$

- Vérifier que $h(t) = -5(t - 1)^2 + 6$.
- Déterminer la hauteur maximale atteinte et l'instant correspondant.
- À quelle hauteur le ballon se trouve-t-il au bout de 0,5 s ? de 1,5 s ? Commenter.



Hauteur du ballon en fonction du temps.

Exercice 3 - Quand le ballon touche-t-il le sol ?

On reprend $h(t) = -5(t - 1)^2 + 6$, hauteur en mètres du ballon de l'exercice précédent.

- Résoudre $h(t) = 0$ et interpréter.
- Le ballon atteint-il 7 mètres ? Justifier.
- Pendant combien de temps le ballon est-il à plus de 5 mètres de haut ?

Exercice 4 - Un terrain rectangulaire

Un terrain rectangulaire a une longueur qui dépasse sa largeur de 5 mètres, et une aire de 84 m². On note x la largeur, en mètres.

- Mettre le problème en équation.
- Vérifier que $x^2 + 5x - 84 = (x - 7)(x + 12)$.
- Résoudre et donner les dimensions du terrain.

Exercice 5 - Le bénéfice d'une entreprise

Une entreprise fabrique x objets par jour, avec $0 \leq x \leq 60$. Son bénéfice quotidien, en euros, est

$$B(x) = -x^2 + 60x - 500$$

- Vérifier que $B(x) = -(x - 30)^2 + 400$.
- Déterminer la production qui maximise le bénéfice, et ce bénéfice.
- Résoudre $B(x) = 0$ et interpréter.

Exercice 6 - Un bénéfice suffisant

On reprend $B(x) = -(x - 30)^2 + 400$, bénéfice quotidien en euros de l'entreprise précédente.

- Résoudre $B(x) \geq 300$.
- Combien de productions entières permettent un bénéfice d'au moins 300 € ?
- Un bénéfice de 450 € est-il atteignable ?

Exercice 7 - Deux nombres de somme fixée

On cherche deux nombres positifs dont la somme vaut 12 et dont le produit est le plus grand possible. On note x l'un des deux nombres.

- Exprimer l'autre nombre, puis le produit $P(x)$.
- Vérifier que $P(x) = 36 - (x - 6)^2$.
- Conclure.

Exercice 8 - Fixer un prix de vente

Un commerçant constate que, pour un prix de vente de p euros, il vend $100 - 2p$ articles par jour (avec $0 < p < 50$). On note $R(p)$ sa recette quotidienne.

- Exprimer $R(p)$.
- Vérifier que $R(p) = -2(p - 25)^2 + 1\,250$.
- Déterminer le prix qui maximise la recette, et cette recette.
- Que se passe-t-il si le prix est fixé à 40 € ? Commenter.

Exercice 9 - Un triangle rectangle

Un triangle a une base de x centimètres et une hauteur qui dépasse la base de 3 cm. Son aire vaut 20 cm^2 .

- Mettre le problème en équation.
- Vérifier que $x^2 + 3x - 40 = (x - 5)(x + 8)$.
- Déterminer les dimensions du triangle.

Exercice 10 - Un cadre autour d'un tableau

Un tableau rectangulaire mesure 20 cm sur 30 cm. On l'entoure d'un cadre de largeur constante x centimètres.

- Exprimer l'aire totale (tableau plus cadre), puis l'aire du **cadre seul**.
- On souhaite que le cadre ait une aire de 216 cm^2 . Vérifier que cela conduit à $x^2 + 25x - 54 = 0$, et que $x^2 + 25x - 54 = (x - 2)(x + 27)$.
- Déterminer la largeur du cadre.

Exercice 11 - Un jet d'eau

Un jet d'eau décrit une parabole. À x mètres de la buse, sa hauteur, en mètres, est

$$j(x) = -0,5x^2 + 2x$$

- a) Vérifier que $j(x) = -0,5(x - 2)^2 + 2$.
- b) Déterminer la hauteur maximale du jet et la distance à laquelle elle est atteinte.
- c) À quelle distance de la buse l'eau retombe-t-elle au sol ?
- d) Un bassin circulaire de 3 m de rayon, centré sur la buse, suffit-il à recueillir l'eau ?

Exercice 12 - Un champ à clôturer

Un agriculteur veut délimiter un champ rectangulaire d'aire 150 m^2 , le long d'une rivière rectiligne (aucune clôture du côté de la rivière). On note x la largeur, en mètres, des deux côtés perpendiculaires à la rivière.

- a) Exprimer la longueur du côté parallèle à la rivière, puis la longueur totale $L(x)$ de clôture nécessaire.
- b) Calculer $L(5)$, $L(10)$ et $L(15)$.
- c) Laquelle de ces trois largeurs économise le plus de clôture ?

Exercice 13 - Une somme de deux carrés

Deux nombres ont pour somme 10. On note x l'un d'eux et $S(x)$ la somme de leurs carrés.

- a) Exprimer $S(x)$ et la développer.
- b) Vérifier que $S(x) = 2(x - 5)^2 + 50$.
- c) Déterminer les deux nombres pour lesquels la somme des carrés est **minimale**, et cette somme.

Exercice 14 - Freinage et sécurité

Sur route sèche, la distance d'arrêt d'un véhicule, en mètres, est bien approchée par

$$d(v) = \frac{v^2}{100} + \frac{v}{3,6}$$

où v est la vitesse en km/h. Le premier terme est la distance de freinage, le second la distance parcourue pendant le temps de réaction (environ une seconde).

- a) Calculer la distance d'arrêt à 50 km/h, puis à 100 km/h. Arrondir au mètre.
- b) La distance d'arrêt double-t-elle quand la vitesse double ?
- c) Un obstacle est à 60 mètres. À 90 km/h, le véhicule peut-il s'arrêter à temps ?

Exercice 15 - Synthèse : une piste d'athlétisme

Un terrain rectangulaire de 40 m sur 60 m doit être entouré d'une piste de largeur constante x mètres.

- a) Exprimer l'aire totale, puis l'aire de la piste seule.
- b) On dispose de $1\,344 \text{ m}^2$ de revêtement. Vérifier que cela conduit à

$x^2 + 50x - 336 = 0$, puis que $x^2 + 50x - 336 = (x - 6)(x + 56)$.

c) Déterminer la largeur de la piste.

d) Quelle largeur faudrait-il pour une piste de 700 m^2 ? Vérifier que $x = 3,5$ convient.