

Plaquette 5 – Synthèse difficile

Équations et inéquations du second degré — Seconde

Exercices

Méthode

Cette plaquette rassemble les situations où l'on ne voit pas la méthode du premier coup. Trois réflexes s'y ajoutent à ceux des plaquettes précédentes. D'abord, **factoriser en deux temps** : une différence de carrés dont les deux termes sont eux-mêmes des expressions, ou un produit qu'il faut d'abord regrouper. Ensuite, **changer de regard** : une équation en x^4 devient une équation en $X = x^2$, et une expression qui refuse de se factoriser se laisse étudier par sa **forme canonique**, qui prouve un signe constant. Enfin, **discuter selon un paramètre** : combien de solutions selon la valeur de m , question à laquelle on répond par le signe d'une quantité, jamais par un calcul. Dans tous les cas, la rédaction compte autant que le résultat : on annonce la méthode, on **vérifie chaque factorisation** par développement, et l'on contrôle par un point test.

Exercice 1 – Une factorisation en deux temps

On pose $A = (2x - 1)^2 - (x + 3)^2$.

- Factoriser A .
- Développer A pour vérifier.
- Résoudre $A = 0$.

Exercice 2 – Une équation de degré 4

On considère l'équation $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

- Vérifier que $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$.
- En déduire une factorisation en quatre facteurs du premier degré.
- Résoudre l'équation.

Exercice 3 – Une expression toujours positive

Soit $f(x) = x^2 + x + 1$.

- Vérifier que $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.
- En déduire que $f(x) > 0$ pour tout réel x .
- L'équation $f(x) = 0$ a-t-elle des solutions ? Et l'inéquation $f(x) < 1$?

Exercice 4 – Discuter selon un paramètre

Soit m un nombre réel. On considère l'équation $(x - 2)^2 = m$.

- Discuter, selon les valeurs de m , le nombre de solutions.
- Pour quelles valeurs de m la solution est-elle unique ? La donner.
- Résoudre l'équation pour $m = 16$, puis pour $m = -4$.

Exercice 5 - Une inéquation quotient et produit

Résoudre l'inéquation $\frac{(x-1)(x+2)}{x-3} \leq 0$.

Exercice 6 - Comparer un carré et un produit

- a) Montrer que pour tout réel x , $(x+1)^2 - 4x = (x-1)^2$.
- b) En déduire une comparaison entre $(x+1)^2$ et $4x$.
- c) Dans quel cas y a-t-il égalité ?

Exercice 7 - Un rectangle imposé

Un rectangle a un périmètre de 24 cm et une aire de 35 cm². On note x l'une de ses dimensions.

- a) Exprimer l'autre dimension, puis mettre le problème en équation.
- b) Vérifier que $x^2 - 12x + 35 = (x-5)(x-7)$.
- c) Déterminer les dimensions du rectangle.
- d) Un rectangle de périmètre 24 cm et d'aire 40 cm² existe-t-il ?

Exercice 8 - Un triangle rectangle à trouver

Un triangle rectangle a pour côtés de l'angle droit x et $x+7$ centimètres, et pour hypoténuse $x+8$ centimètres.

- a) Écrire l'égalité de Pythagore et la réduire.
- b) Vérifier que $x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$.
- c) Déterminer les trois côtés du triangle.

Exercice 9 - Une inéquation avec un inverse

Résoudre l'inéquation $\frac{1}{x} \geq x$.

Exercice 10 - Un encadrement à double condition

Résoudre le système d'inéquations $1 \leq x^2 \leq 9$.

Exercice 11 - Un signe avec un coefficient négatif

On pose $g(x) = -2(x-1)(x+3)$.

- a) Développer $g(x)$.
- b) Dresser le tableau de signes de $g(x)$.
- c) Résoudre $g(x) > 0$, et comparer au cas d'un coefficient positif.

Exercice 12 - Deux nombres à retrouver

Deux nombres ont pour somme 7 et pour produit 12. On note x l'un d'eux.

- Exprimer l'autre nombre, puis mettre le problème en équation.
- Vérifier que $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$.
- Déterminer les deux nombres.
- Existe-t-il deux nombres de somme 7 et de produit 15 ?

Exercice 13 - Une parabole et un paramètre

Soit m un réel et $f_m(x) = (x - 2)^2 + m$.

- Pour quelles valeurs de m la courbe de f_m coupe-t-elle l'axe des abscisses en deux points ?
- Pour quelles valeurs de m ne le coupe-t-elle pas ?
- Pour $m = -9$, déterminer les points d'intersection.

Exercice 14 - Une équation produit déguisée

Résoudre l'équation $(x - 3)(x + 1) = (x - 3)(2x - 5)$.

Exercice 15 - Synthèse : un problème complet

Une entreprise vend x articles par jour, avec $0 \leq x \leq 50$. Son bénéfice quotidien, en euros, est $B(x) = -x^2 + 40x - 175$.

- Vérifier que $B(x) = -(x - 20)^2 + 225$.
- Déterminer le bénéfice maximal et la production correspondante.
- Vérifier que $-x^2 + 40x - 175 = -(x - 5)(x - 35)$, puis déterminer la plage de production rentable.
- Résoudre $B(x) \geq 200$ et compter les productions entières possibles.