Plaquette 3 – Courbes, symétries et lecture graphique

Fonction carré et fonction inverse — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les deux courbes de référence.

— **La parabole**, courbe de $x \mapsto x^2$: elle a son **sommet** à l'origine $O(0\,;0)$, est entièrement située **au-dessus** de l'axe des abscisses, et est symétrique par rapport à l'**axe des ordonnées** :

$$(-x)^2 = x^2 \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

— **L'hyperbole**, courbe de $x \mapsto \frac{1}{x}$: elle est formée de **deux branches** séparées, l'une dans le quart supérieur droit, l'autre dans le quart inférieur gauche. Elle est symétrique par rapport à l'**origine** :

$$\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} \qquad \text{pour tout } x \neq 0$$

Elle ne coupe **ni** l'axe des abscisses **ni** l'axe des ordonnées.

— **Lire une image de** a : on part de a sur l'axe des abscisses, on monte jusqu'à la courbe, on lit l'ordonnée.

— **Lire les antécédents de** b : on part de b sur l'axe des ordonnées, on trace l'**horizontale** $y = b$, on lit les abscisses de **tous** les points d'intersection.

— **Résoudre graphiquement** $f(x) = g(x)$: les solutions sont les **abscisses** des points d'intersection des deux courbes.

— **Résoudre graphiquement** $f(x) \leq g(x)$: ce sont les abscisses pour lesquelles la courbe de f est **en dessous** de celle de g.

— ⚠ Une lecture graphique donne une valeur **approchée**. Les points d'intersection lus se vérifient par le calcul.

Correction de l'exercice 1 – Lire la parabole

a) On part de l'abscisse et on monte jusqu'à la courbe.

Pour $x = 2$: on lit une ordonnée de 4, donc $f(2) = 4$. Contrôle par le calcul : $2^2 = 4$ ✓

Pour $x = -3$: on lit 9, donc $f(-3) = 9$. Contrôle : $(-3)^2 = 9$ ✓

b) On trace l'horizontale $y = 4$. Elle coupe la parabole en **deux** points, d'abscisses -2 et 2. Les antécédents de 4 sont donc -2 et 2.

C'est cohérent avec la résolution algébrique de $x^2 = 4$, qui donne deux solutions opposées.

c) **Aucun.** L'horizontale $y = -2$ passe **sous** la parabole et ne la rencontre jamais, puisque toute la courbe est située au-dessus de l'axe des abscisses.

Algébriquement, cela traduit que $x^2 = -2$ n'a pas de solution : un carré n'est jamais négatif.

La règle générale de lecture. Une horizontale $y = k$ coupe la parabole en **deux** points si $k > 0$, en **un seul** (le sommet) si $k = 0$, et en **aucun** si $k < 0$. On retrouve exactement la discussion de l'équation $x^2 = k$.

Le réflexe de contrôle. Chaque lecture graphique se vérifie ici par un calcul immédiat.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Sur des valeurs non entières, la lecture ne donnerait qu'une approximation : $f(1{,}5)$ se lit « environ 2,3 » alors que la valeur exacte est 2,25.

Réponse. a) $f(2) = 4$ et $f(-3) = 9$ — b) -2 et 2 — c) aucun : la parabole est entièrement au-dessus de l'axe des abscisses.

Correction de l'exercice 2 – Lire l'hyperbole

a) Pour $x = 2$, on lit une ordonnée de 0,5, donc $g(2) = 0{,}5$. Contrôle : $\frac{1}{2} = 0{,}5$ ✓

Pour $x = -1$, on lit -1, donc $g(-1) = -1$. Contrôle : $\frac{1}{-1} = -1$ ✓

b) On trace l'horizontale $y = 2$. Elle coupe l'hyperbole en **un seul** point, d'abscisse 0,5. L'antécédent de 2 est donc 0,5.

Contrôle : $\frac{1}{0{,}5} = 2$ ✓ Contrairement à la parabole, l'hyperbole n'est coupée qu'**une fois** par chaque horizontale non nulle.

c) **Non, ni l'un ni l'autre.**

Elle ne coupe pas l'axe des abscisses, car cela supposerait $\frac{1}{x} = 0$, impossible pour une fraction de numérateur 1.

Elle ne coupe pas l'axe des ordonnées, car cela supposerait $x = 0$, valeur exclue de l'ensemble de définition.

Le vocabulaire. On dit que les deux axes sont les **asymptotes** de l'hyperbole : la courbe s'en approche indéfiniment sans jamais les atteindre. Le mot sera revu en Terminale, mais le phénomène se voit très bien ici.

Les deux branches. Sur les x positifs, la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses ; sur les x négatifs, en dessous. Cela traduit que $\frac{1}{x}$ est **du même signe que** x. Aucun point de la courbe n'occupe les deux autres quarts du plan.

Réponse. a) $g(2) = 0{,}5$ et $g(-1) = -1$ — b) 0,5 — c) non : elle ne coupe aucun des deux axes.

Correction de l'exercice 3 – La symétrie de la parabole

a) On calcule :

$$f(-4) = (-4)^2 = 16 \qquad f(4) = 4^2 = 16$$

$$f(-1{,}5) = (-1{,}5)^2 = 2{,}25 \qquad f(1{,}5) = 1{,}5^2 = 2{,}25$$

Dans les deux cas, les images sont **égales**.

b) Deux points de la parabole d'abscisses opposées ont la **même ordonnée** : ce sont les points $M(-a\,;a^2)$ et $M'(a\,;a^2)$. Ils sont donc symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

c) Pour tout réel x :

$$f(-x) = (-x)^2 = (-x) \times (-x) = x^2 = f(x)$$

le produit de deux nombres opposés étant égal au produit des deux nombres de départ, puisque les deux signes moins se compensent.

Deux nombres opposés ont donc la même image : les points $(x\,;x^2)$ et $(-x\,;x^2)$ sont symétriques par rapport à l'**axe des ordonnées**, et la parabole admet cet axe comme axe de symétrie.

L'usage pratique de cette symétrie. Il suffit de tracer la courbe pour $x \geq 0$, puis de la **compléter par symétrie** : on divise le travail par deux. C'est la méthode recommandée

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

pour tout tracé de parabole.

Une conséquence sur les antécédents. La symétrie explique pourquoi un nombre positif a **deux** antécédents opposés : les deux points de même ordonnée se répondent de part et d'autre de l'axe.

Le seul point invariant. Le sommet $O(0\,;0)$ est son propre symétrique, puisqu'il est situé **sur** l'axe de symétrie. C'est aussi le point où la fonction atteint son minimum.

Réponse. a) 16 et 16, puis 2,25 et 2,25 — b) ils ont la même ordonnée — c) $(-x)^2 = x^2$: la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Correction de l'exercice 4 – La symétrie de l'hyperbole

a) On calcule :

$$g(-4) = -0{,}25 \qquad g(4) = 0{,}25 \qquad g(-0{,}5) = -2 \qquad g(0{,}5) = 2$$

Cette fois les images ne sont pas égales, mais **opposées**.

b) Pour tout $x \neq 0$:

$$g(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -g(x)$$

car une fraction dont le dénominateur est négatif peut voir son signe reporté devant la fraction.

c) Deux nombres opposés ont des images opposées : les points $(x\,;g(x))$ et $(-x\,;-g(x))$ sont symétriques par rapport à l'**origine** du repère, qui est donc centre de symétrie de l'hyperbole.

Concrètement, les points $M(a\,;\frac{1}{a})$ et $M'(-a\,;-\frac{1}{a})$ sont symétriques par rapport à O : pour passer de l'un à l'autre, on change le signe des **deux** coordonnées.

La comparaison avec la parabole. La symétrie de la parabole est **axiale** (par rapport à une droite), celle de l'hyperbole est **centrale** (par rapport à un point). Algébriquement : $f(-x) = f(x)$ d'un côté, $g(-x) = -g(x)$ de l'autre.

Comment le vérifier sur le dessin. Une symétrie centrale est un **demi-tour** autour de O : en faisant pivoter la figure d'un demi-tour, chaque branche de l'hyperbole vient se superposer à l'autre. Une symétrie axiale, elle, est un **pliage** le long de l'axe.

L'usage pratique. Comme pour la parabole, on peut tracer une seule branche — celle des $x > 0$ — puis obtenir l'autre par symétrie centrale.

Réponse. a) $-0{,}25$ et $0{,}25$, puis -2 et 2 — b) $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$ — c) symétrie par rapport à l'origine (et non par rapport à un axe).

Correction de l'exercice 5 – Résoudre graphiquement une équation

a) L'horizontale $y = 9$ coupe la parabole en deux points, d'abscisses -3 et 3. L'ensemble des solutions est

$$S = \{-3\,;3\}$$

Confirmation par le calcul : $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \sqrt{9} = 3$ ou $x = -\sqrt{9} = -3$ ✓

b) L'horizontale $y = 2$ coupe la parabole en deux points d'abscisses voisines de $-1{,}4$ et $1{,}4$.

Par le calcul, les solutions **exactes** sont $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$, soit

$$S = \{-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\} \qquad \text{avec } \sqrt{2} \approx 1{,}414$$

La lecture graphique donnait bien l'ordre de grandeur, mais pas la valeur exacte.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) L'horizontale $y = 0$ est l'axe des abscisses lui-même : il touche la parabole en un **seul** point, le sommet O. Donc

$$S = \{0\}$$

Ce que le graphique apporte. Il donne immédiatement le **nombre** de solutions, ce qui est souvent la vraie question. Deux points d'intersection pour $k > 0$, un seul pour $k = 0$, aucun pour $k < 0$.

Ce que le graphique n'apporte pas. La valeur **exacte**. En b), lire « 1,4 » n'est pas une réponse acceptable si l'énoncé demande les solutions exactes : il faut écrire $\sqrt{2}$.

La bonne rédaction. On commence par « graphiquement, les solutions sont environ… », puis on confirme par le calcul. Les deux étapes se complètent et ne se remplacent pas.

Réponse. a) $S = \{-3\,;3\}$ — b) $S = \{-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\}$, soit environ $\pm 1{,}41$ — c) $S = \{0\}$.

Correction de l'exercice 6 – Résoudre graphiquement une inéquation

Les deux points d'intersection sont $A(-2\,;4)$ et $B(2\,;4)$: ce sont eux qui séparent les deux situations.

a) L'inéquation $x^2 \leq 4$ demande les abscisses pour lesquelles la parabole est **en dessous** (ou sur) la droite $y = 4$. C'est le cas **entre** A et B, donc pour

$$-2 \leq x \leq 2$$

b) L'inéquation $x^2 > 4$ demande au contraire les abscisses où la parabole est **strictement au-dessus** de la droite. C'est le cas **à l'extérieur** du segment, donc pour

$$x < -2 \qquad \text{ou} \qquad x > 2$$

c) Sous forme d'intervalles :

$$S_a = [-2\,;2] \qquad S_b =]-\infty\,;-2[\cup]2\,;+\infty[$$

Les deux ensembles sont bien **complémentaires** l'un de l'autre, aux points -2 et 2 près : c'est un contrôle utile.

L'erreur de forme à éviter. Écrire S_b comme un seul intervalle, ou pire « $2 < x < -2$ », qui ne décrit aucun nombre. Une inéquation du type $x^2 > k$ donne **toujours** une réunion de deux intervalles.

La méthode de lecture. « Sous la droite » signifie $f(x) \leq k$, « au-dessus » signifie $f(x) \geq k$. On repère d'abord les **points d'intersection**, puis on regarde la position **de part et d'autre**.

Le contrôle par un point test. Prenons $x = 0$: $0^2 = 0 \leq 4$ ✓ et $0 \in [-2\,;2]$ ✓ Prenons $x = 3$: $9 > 4$ ✓ et $3 \in]2\,;+\infty[$ ✓

Réponse. a) $-2 \leq x \leq 2$ — b) $x < -2$ ou $x > 2$ — c) $S_a = [-2\,;2]$ et $S_b =]-\infty\,;-2[\cup]2\,;+\infty[$.

Correction de l'exercice 7 – Lecture graphique sur l'hyperbole

a) L'horizontale $y = 2$ coupe la branche de droite en un point d'abscisse 0,5 : la seule solution est $x = 0{,}5$.

L'horizontale $y = -1$ coupe la branche de gauche en un point d'abscisse -1 : la seule solution est $x = -1$.

b) Confirmation par le calcul :

$$\frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} = 0{,}5 \qquad \frac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{-1} = -1$$

Les deux lectures sont exactes ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) L'équation $\frac{1}{x} = k$ a :

— **une unique solution** $x = \frac{1}{k}$ si $k \neq 0$;

— **aucune solution** si $k = 0$, car l'horizontale $y = 0$ est l'axe des abscisses, que l'hyperbole ne rencontre jamais.

La différence essentielle avec la parabole. Chaque horizontale non nulle coupe l'hyperbole **une seule fois**, alors qu'elle coupe la parabole deux fois. Cela vient de ce que la fonction inverse est strictement monotone sur chaque branche, et que les deux branches sont de signes différents.

Le rôle du signe de k. Si $k > 0$, la solution est sur la branche **de droite** ; si $k < 0$, sur celle **de gauche**. Le signe de la solution est donc toujours celui de k — ce qui découle de $x = \frac{1}{k}$.

Le contrôle immédiat. La solution d'une équation $\frac{1}{x} = k$ est simplement $\frac{1}{k}$: c'est l'inverse du second membre. On peut toujours vérifier en une ligne.

Réponse. a) $x = 0{,}5$, puis $x = -1$ — b) $\frac{1}{0{,}5} = 2$ ✓ et $\frac{1}{-1} = -1$ ✓ — c) une solution si $k \neq 0$, aucune si $k = 0$.

Correction de l'exercice 8 – Parabole et droite

a) Les deux courbes se coupent en $A(-1\,;1)$ et $B(2\,;4)$.

b) Les solutions de $x^2 = x + 2$ sont les **abscisses** de ces points, soit

$$S = \{-1\,;2\}$$

Vérification par le calcul, pour $x = -1$:

$$x^2 = (-1)^2 = 1 \qquad x + 2 = -1 + 2 = 1 \qquad \text{égaux } ✓$$

Pour $x = 2$:

$$x^2 = 4 \qquad x + 2 = 4 \qquad \text{égaux } ✓$$

c) L'inéquation $x^2 \leq x + 2$ demande où la parabole est **en dessous** de la droite. Sur le graphique, c'est entre les deux points d'intersection :

$$S = [-1\,;2]$$

Le contrôle par un point test. Prenons $x = 0$, qui appartient à $[-1\,;2]$: $0^2 = 0$ et $0 + 2 = 2$, donc $0 \leq 2$ ✓ Prenons $x = 3$, à l'extérieur : $9 > 5$ ✓ l'inégalité est bien fausse.

Pourquoi on lit les abscisses et non les ordonnées. Résoudre une équation, c'est chercher les valeurs de x qui la vérifient. Les ordonnées 1 et 4 sont les valeurs communes prises par les deux membres, pas les solutions.

Le lien avec l'algèbre. L'équation $x^2 = x + 2$ s'écrit aussi $x^2 - x - 2 = 0$, qui se factorise en $(x + 1)(x - 2) = 0$. On retrouve bien -1 et 2 — ce sera l'objet de la plaquette suivante.

Réponse. a) $A(-1\,;1)$ et $B(2\,;4)$ — b) $S = \{-1\,;2\}$ — c) $S = [-1\,;2]$.

Correction de l'exercice 9 – Hyperbole et droite

a) Les deux courbes se coupent en $A(-1\,;-1)$ et $B(1\,;1)$.

b) Les solutions de $\frac{1}{x} = x$ sont les abscisses de ces points :

$$S = \{-1\,;1\}$$

Vérification : pour $x = 1$, $\frac{1}{1} = 1$ ✓ ; pour $x = -1$, $\frac{1}{-1} = -1$ ✓

On peut aussi le retrouver algébriquement : pour $x \neq 0$, multiplier les deux membres par

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

x donne $1 = x^2$, dont les solutions sont -1 et 1.

c) On cherche où l'hyperbole est **au-dessus** de la droite. Le graphique montre deux zones :

— sur les négatifs, l'hyperbole est au-dessus de la droite pour $x < -1$;

— sur les positifs, elle l'est pour $0 < x < 1$.

D'où

$$S =]-\infty\,;-1[\cup]0\,;1[$$

Les deux points de vigilance. D'abord, $x = 0$ est **exclu** : la fonction inverse n'y est pas définie. Ensuite, la réponse est une **réunion** de deux intervalles, séparés par une zone où l'inégalité est fausse.

Le contrôle par des points tests. $x = -2$: $\frac{1}{-2} = -0{,}5 > -2$ ✓ ; $x = 0{,}5$: $2 > 0{,}5$ ✓ ; $x = -0{,}5$: $-2 < -0{,}5$, l'inégalité est bien fausse ✓ ; $x = 2$: $0{,}5 < 2$, fausse ✓

Ce que cela retrouve. Pour $0 < x < 1$, on avait établi que $\frac{1}{x} > 1 > x$. Le graphique confirme cette chaîne d'inégalités vue à la plaquette précédente.

Réponse. a) $A(-1\,;-1)$ et $B(1\,;1)$ — b) $S = \{-1\,;1\}$ — c) $S =]-\infty\,;-1[\cup]0\,;1[$.

Correction de l'exercice 10 – Comparer les deux courbes

a) Les deux courbes se rencontrent en $O(0\,;0)$ et en $B(1\,;1)$.

b) Entre ces deux points, c'est-à-dire pour $0 < x < 1$, la parabole est **en dessous** de la droite : le carré est plus petit que le nombre.

Au-delà de $x = 1$, la parabole passe au-dessus : le carré devient plus grand que le nombre.

c) On retrouve exactement le résultat obtenu par le calcul dans la première plaquette :

$$x^2 < x \Leftrightarrow 0 < x < 1 \qquad \text{et} \qquad x^2 > x \Leftrightarrow x > 1 \ \ (\text{pour } x > 0)$$

Le graphique en donne une lecture immédiate : la position relative des deux courbes **est** la comparaison des deux expressions.

Le cas des négatifs. Sur $x < 0$, la parabole est au-dessus de l'axe et la droite en dessous : le carré l'emporte toujours. C'est pourquoi $x^2 > x$ pour tout $x < 0$ également.

La méthode générale. Pour comparer deux expressions $f(x)$ et $g(x)$, on trace les deux courbes et on repère leurs points d'intersection. Ceux-ci **découpent** l'axe en zones où la comparaison ne change pas de sens.

Le point $B(1\,;1)$. Il apparaît dans plusieurs exercices de cette plaquette : c'est le point commun à la parabole, à l'hyperbole et à la droite $y = x$. Pour $x = 1$, les trois expressions x, x^2 et $\frac{1}{x}$ valent toutes 1.

Réponse. a) $O(0\,;0)$ et $B(1\,;1)$ — b) sur $]0\,;1[$ — c) que $x^2 < x$ exactement pour $0 < x < 1$.

Correction de l'exercice 11 – Reconnaître une courbe

a) **L'hyperbole.** Les deux branches séparées et l'absence d'intersection avec les axes en sont la signature. La parabole, elle, est d'un seul tenant et touche l'axe des abscisses en son sommet.

b) **La parabole.** Elle passe par l'origine, et on vérifie le second point : $(-2)^2 = 4$ ✓ L'hyperbole est exclue puisqu'elle ne passe pas par $(0\,;0)$ — la valeur 0 n'est même pas dans son ensemble de définition.

c) **L'hyperbole.** C'est la courbe symétrique par rapport à l'origine, et on vérifie : $\frac{1}{0{,}5} = 2$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

✓

d) **La parabole**, à ceci près qu'elle **touche** l'axe des abscisses en O. Si l'affirmation exige « strictement au-dessus », alors aucune des deux ne convient : la parabole touche l'axe, et l'hyperbole n'est pas symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

On retiendra la formulation exacte : la parabole est **au-dessus ou sur** l'axe des abscisses.

Les quatre critères pour trancher. Le nombre de morceaux (un ou deux), le passage par l'origine (oui ou non), le type de symétrie (axiale ou centrale) et le signe des ordonnées (toujours positives, ou du signe de x). Deux de ces critères suffisent presque toujours.

La vérification systématique. Dès qu'un point est donné, on **teste** son appartenance en calculant l'image de son abscisse. C'est le moyen le plus rapide de départager deux courbes candidates.

Réponse. a) l'hyperbole — b) la parabole — c) l'hyperbole — d) la parabole, en précisant qu'elle **touche** l'axe des abscisses en O.

Correction de l'exercice 12 – Tracer la parabole point par point

a) On élève chaque valeur au carré.

x	$-2{,}5$	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2	$2{,}5$
x^2	$6{,}25$	4	1	$0{,}25$	0	$0{,}25$	1	4	$6{,}25$

b) Il suffit de calculer les images pour $x \geq 0$, de placer ces points, puis de **compléter par symétrie** par rapport à l'axe des ordonnées.

C'est légitime parce que deux nombres opposés ont le même carré : $(-x)^2 = x^2$. Chaque point $(a\,;a^2)$ de la partie droite a pour symétrique $(-a\,;a^2)$, qui appartient aussi à la courbe.

c) Parce que les valeurs autour de 0 sont **très petites et très proches** : 0,25 pour $x = \pm 0{,}5$, mais seulement 0,01 pour $x = \pm 0{,}1$ et 0,0001 pour $x = \pm 0{,}01$. La courbe s'aplatit en approchant de l'origine.

Elle passe donc par O en s'appuyant **à plat** sur l'axe des abscisses, formant un creux arrondi et non un angle.

L'erreur de tracé la plus fréquente. Relier les points au-dessus du sommet en formant un V. Pour l'éviter, on ajoute des points intermédiaires **près de zéro**, par exemple $x = \pm 0{,}25$ (image 0,0625) : ils imposent l'arrondi.

Le nombre de points utile. Neuf points comme ici suffisent pour une allure correcte sur $[-2{,}5\,;2{,}5]$, à condition qu'ils soient **resserrés près du sommet**, là où la courbure est la plus forte.

Le contrôle de symétrie. La ligne des images doit se lire de la même façon dans les deux sens : 6,25, 4, 1, 0,25, 0, 0,25, 1, 4, 6,25 ✓

Réponse. a) 6,25 ; 4 ; 1 ; 0,25 ; 0 ; 0,25 ; 1 ; 4 ; 6,25 — b) par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, car $(-x)^2 = x^2$ — c) les valeurs proches de 0 sont très petites : la courbe s'aplatit et forme un creux arrondi.

Correction de l'exercice 13 – Une lecture approchée

a) Sur un graphique gradué de 1 en 1, on lit environ 2,9 pour $f(1{,}7)$.

La valeur exacte est

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$f(1{,}7) = 1{,}7^2 = 2{,}89$$

L'écart est donc d'environ 0,01 — négligeable ici, mais la lecture reste approximative : on ne pouvait pas deviner le second chiffre après la virgule.

b) Sur l'hyperbole, on lit environ 0,3 pour $g(3)$. La valeur exacte est

$$g(3) = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$$

Ici la lecture est **plus délicate**, parce que la courbe est presque horizontale dans cette zone : une petite imprécision verticale se traduit par une grosse imprécision sur l'abscisse, et réciproquement.

c) Une lecture graphique donne un **ordre de grandeur** fiable, mais jamais une valeur exacte. Elle sert à :

— deviner le **nombre** de solutions d'une équation ;
— **contrôler** un résultat obtenu par le calcul ;
— répondre quand l'énoncé demande explicitement « graphiquement ».

Elle ne remplace pas le calcul dès que l'énoncé demande une valeur exacte ou une démonstration.

Là où la lecture est la moins fiable. Sur les portions où la courbe est très **raide** (la parabole loin du sommet) ou très **plate** (l'hyperbole loin de l'origine). Dans le premier cas l'abscisse est mal déterminée, dans le second c'est l'ordonnée.

La bonne pratique de rédaction. Écrire « on lit environ 2,9 », avec le mot « environ », puis confirmer : « le calcul donne 2,89 ». Annoncer une lecture graphique comme une valeur exacte est une faute de rigueur.

Le bilan de la plaquette. Une parabole symétrique par rapport à un axe, une hyperbole symétrique par rapport à un point ; les images se lisent verticalement, les antécédents horizontalement ; et une intersection de courbes résout une équation.

Réponse. a) environ 2,9 pour une valeur exacte de 2,89 — b) environ 0,3 pour $\frac{1}{3} \approx 0{,}333$ — c) une lecture graphique donne un ordre de grandeur, jamais une valeur exacte.

Correction de l'exercice 14 – Deux courbes à identifier

a) C_1 **est la parabole**, courbe de la fonction carré : elle est d'un seul tenant, entièrement au-dessus de l'axe des abscisses, et symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

C_2 **est l'hyperbole**, courbe de la fonction inverse : elle est formée de deux branches séparées, et la branche de gauche est située sous l'axe des abscisses, ce qui traduit que $\frac{1}{x} < 0$ pour $x < 0$.

b) Les deux courbes n'ont qu'**un seul** point commun, $B(1\,;1)$.

En effet, sur les négatifs, la parabole est au-dessus de l'axe et l'hyperbole en dessous : elles ne peuvent pas se rencontrer. Sur les positifs, on résout

$$x^2 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

c) On cherche les $x > 0$ où la parabole est **en dessous** de l'hyperbole. Graphiquement, c'est le cas avant leur point d'intersection :

$$0 < x < 1$$

Contrôle avec $x = 0{,}5$: $x^2 = 0{,}25$ et $\frac{1}{x} = 2$, donc $0{,}25 < 2$ ✓ Avec $x = 2$: $4 > 0{,}5$, l'inégalité est bien fausse ✓

Ce que le point B **rassemble.** Pour $x = 1$, les trois fonctions de référence $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$x \mapsto \frac{1}{x}$ prennent la même valeur 1. C'est le seul point où les trois courbes se rencontrent.

La hiérarchie complète sur les positifs. Pour $0 < x < 1$: $x^2 < x < 1 < \frac{1}{x}$. Pour $x > 1$: $\frac{1}{x} < 1 < x < x^2$. Le graphique donne ces deux chaînes d'un seul regard.

Réponse. a) C_1 est la parabole (un seul morceau, au-dessus de l'axe, symétrie axiale), C_2 l'hyperbole (deux branches) — b) le seul point commun est $B(1\,;1)$ — c) pour $0 < x < 1$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse graphique

a) Sur $]-\infty\,;0[$, la fonction carré **décroît** et la fonction inverse **décroît** aussi : elles varient dans le **même sens**.

Sur $]0\,;+\infty[$, la fonction carré **croît** tandis que la fonction inverse **décroît** : elles varient en sens **contraires**.

b) Cela dépend du signe de k.

— Si $k > 0$: l'horizontale coupe la parabole en **deux** points et l'hyperbole en **un** point (sur la branche de droite).
— Si $k = 0$: elle touche la parabole en **un** point (le sommet) et ne coupe **pas** l'hyperbole.
— Si $k < 0$: elle ne coupe **pas** la parabole, et coupe l'hyperbole en **un** point (branche de gauche).

c) Le tableau récapitulatif :

Valeur de k	$x^2 = k$	$\frac{1}{x} = k$
$k < 0$	aucune solution	une solution, $\frac{1}{k}$
$k = 0$	une solution, 0	aucune solution
$k > 0$	deux solutions, $\pm\sqrt{k}$	une solution, $\frac{1}{k}$

La symétrie frappante du tableau. Les deux fonctions se comportent de façon presque **opposée** : là où l'une a deux solutions, l'autre n'en a qu'une ; et le seul cas sans solution est $k < 0$ pour le carré, $k = 0$ pour l'inverse.

La lecture graphique correspondante. Le nombre de solutions d'une équation $f(x) = k$ est toujours le **nombre de points d'intersection** de la courbe avec l'horizontale $y = k$. Ce lien vaut pour toutes les fonctions, pas seulement celles-ci.

Le bilan de la plaquette. Reconnaître les deux courbes et leurs symétries, lire images et antécédents dans le bon sens, traduire une intersection en équation et une position relative en inéquation — puis confirmer par le calcul.

Réponse. a) même sens sur les négatifs (toutes deux décroissantes), sens contraires sur les positifs — b) selon le signe de k : 2 et 1 si $k > 0$, 1 et 0 si $k = 0$, 0 et 1 si $k < 0$ — c) voir le tableau.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).