Plaquette 1 – Définitions, images et ensembles de définition

Fonction carré et fonction inverse — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les deux fonctions de référence.

— **Fonction carré.** Elle est définie **sur $\mathbb{R}$ tout entier** :

$$f(x) = x^2 \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Son image est **toujours positive ou nulle** : $x^2 \geq 0$, avec $x^2 = 0$ uniquement pour $x = 0$.

— **Fonction inverse.** Elle est définie sur $\mathbb{R}$ **privé de zéro** :

$$g(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{pour tout } x \neq 0 \qquad \text{soit } \mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$$

Son image est **du même signe que** x, et elle ne vaut **jamais** 0.

— **Calculer une image** : on remplace x par la valeur. ⚠ Avec un nombre négatif, les parenthèses sont obligatoires :

$$(-3)^2 = 9 \qquad \text{alors que} \qquad -3^2 = -9$$

— **Chercher un antécédent** : on résout une équation.

$$x^2 = k \text{ a } \begin{cases} \text{deux solutions } \sqrt{k} \text{ et } -\sqrt{k} & \text{si } k > 0 \\ \text{une seule, } 0 & \text{si } k = 0 \\ \text{aucune} & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x} = k \text{ a une unique solution } x = \frac{1}{k} \text{ si } k \neq 0, \text{ et aucune si } k = 0$$

— **Valeur interdite.** Dans un quotient, le dénominateur ne doit pas s'annuler : pour $\frac{1}{x-3}$, la valeur interdite est $x = 3$.

— **Appartenance à une courbe.** Le point $A(a\,;b)$ appartient à la courbe de f si et seulement si $b = f(a)$.

Correction de l'exercice 1 – Images par la fonction carré

On remplace x par chaque valeur dans l'expression $f(x) = x^2$.

$$f(4) = 4^2 = 16 \qquad f(-3) = (-3)^2 = 9 \qquad f(0) = 0^2 = 0$$

$$f(2{,}5) = 2{,}5^2 = 6{,}25 \qquad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Le piège des parenthèses. Pour $f(-3)$, il faut écrire $(-3)^2$ et non -3^2. Dans la seconde écriture, l'élévation au carré porte seulement sur le 3, et le résultat serait -9 : c'est l'erreur la plus fréquente sur cette fonction.

Le contrôle par le signe. Toutes les images obtenues sont **positives ou nulles**, ce qui est normal : le carré d'un nombre est toujours positif ou nul. Une image négative signalerait immédiatement une erreur.

Le cas de 2,5**.** Un carré de nombre décimal se calcule comme un produit : $2{,}5 \times 2{,}5 = 6{,}25$. Et pour la fraction, on élève **numérateur et dénominateur** au carré :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}$.

Réponse. $f(4) = 16$, $f(-3) = 9$, $f(0) = 0$, $f(2{,}5) = 6{,}25$ et $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0{,}25$.

Correction de l'exercice 2 – Images par la fonction inverse

a) On remplace x par chaque valeur dans $g(x) = \frac{1}{x}$.

$$g(2) = \frac{1}{2} = 0{,}5 \qquad g(-4) = \frac{1}{-4} = -0{,}25$$

$$g(0{,}5) = \frac{1}{0{,}5} = 2 \qquad g\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

Pour les deux dernières, on utilise la règle : l'inverse d'une fraction s'obtient en **échangeant** numérateur et dénominateur. Et $0{,}5 = \frac{1}{2}$, dont l'inverse est bien 2.

b) Non. La division par zéro n'a pas de sens : il n'existe aucun nombre qui, multiplié par 0, donne 1. La valeur 0 est donc **exclue** de l'ensemble de définition, que l'on note

$$\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$$

Le contrôle par le signe. $g(2) > 0$ et $g(-4) < 0$: l'inverse d'un nombre est toujours **du même signe** que ce nombre, puisque le numérateur 1 est positif.

Une remarque utile. L'inverse d'un nombre compris entre 0 et 1 est **plus grand que** 1 : $g(0{,}5) = 2$. Inversement, l'inverse d'un nombre plus grand que 1 est compris entre 0 et 1 : $g(2) = 0{,}5$.

Réponse. a) $g(2) = 0{,}5$, $g(-4) = -0{,}25$, $g(0{,}5) = 2$ et $g\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{5}{3}$ — b) non : 0 est exclu, la division par zéro est impossible.

Correction de l'exercice 3 – Deux ensembles de définition

a) La fonction carré est définie **sur** $\mathbb{R}$ **tout entier** : élever au carré est toujours possible.

La fonction inverse est définie sur

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$$

b) **Par la fonction carré** : tous les cinq, sans exception, puisque l'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

Par la fonction inverse : -7, $\frac{1}{3}$, $\sqrt{2}$ et $-0{,}01$, soit tous **sauf** 0.

À titre d'illustration : $\frac{1}{-0{,}01} = -100$, et $\frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$.

c) La fonction carré accepte tous les nombres réels, tandis que la fonction inverse les accepte tous **sauf** 0, parce qu'on ne peut pas diviser par zéro.

Pourquoi $-0{,}01$ **ne pose pas de problème.** C'est un nombre **très proche** de 0, mais il n'est pas nul : son inverse existe et vaut -100. Plus x se rapproche de 0, plus $\frac{1}{x}$ devient grand en valeur absolue — mais il reste toujours défini tant que $x \neq 0$.

Le vocabulaire. L'étoile dans $\mathbb{R}^*$ signifie exactement « privé de zéro ». On rencontrera aussi $\mathbb{R}^+$ (les positifs) et $\mathbb{R}_+^*$ (les strictement positifs).

Réponse. a) $\mathbb{R}$ pour le carré, $\mathbb{R}^*$ pour l'inverse — b) les cinq par le carré, tous sauf 0 par l'inverse — c) seule la division par zéro est interdite.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 4 – Un tableau de valeurs de la fonction carré

On élève chaque valeur au carré.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9

La remarque. Deux nombres **opposés** ont le **même carré** : $(-3)^2 = 3^2 = 9$ et $(-2)^2 = 2^2 = 4$. Le tableau est donc **symétrique** de part et d'autre de la colonne $x = 0$.

Cela s'écrit en toute généralité :

$$\text{pour tout réel } x, \qquad (-x)^2 = x^2$$

Graphiquement, cela se traduira par une courbe symétrique par rapport à l'**axe des ordonnées**.

Une conséquence immédiate. Un nombre positif possède **deux** antécédents opposés : 9 a pour antécédents 3 et -3. C'est la raison pour laquelle l'équation $x^2 = 9$ aura deux solutions, et non une seule.

Le contrôle de cohérence. La ligne des images ne contient que des valeurs positives ou nulles, et la plus petite est 0, atteinte en $x = 0$ ✓

Réponse. 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9 — deux nombres opposés ont le même carré.

Correction de l'exercice 5 – Un tableau de valeurs de la fonction inverse

On calcule l'inverse de chaque valeur.

x	-4	-2	$-0{,}5$	$0{,}5$	2	4
$\frac{1}{x}$	$-0{,}25$	$-0{,}5$	-2	2	0,5	0,25

La remarque. Deux nombres **opposés** ont des inverses **opposés** : $\frac{1}{-2} = -0{,}5$ et $\frac{1}{2} = 0{,}5$. Cela s'écrit

$$\text{pour tout } x \neq 0, \qquad \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$$

Graphiquement, sa courbe sera symétrique par rapport à l'**origine** du repère, et non par rapport à un axe.

Le contraste avec la fonction carré. Le tableau du carré était symétrique avec les **mêmes** valeurs de part et d'autre de 0 ; celui de l'inverse l'est avec des valeurs **opposées**. C'est toute la différence entre une symétrie par rapport à un axe et une symétrie par rapport à un point.

Une observation supplémentaire. Quand x s'éloigne de 0 (de 2 à 4), son inverse se rapproche de 0 (de 0,5 à 0,25). Quand x se rapproche de 0 (de 2 à 0,5), son inverse devient grand (de 0,5 à 2). Rien ne peut valoir $\frac{1}{x} = 0$: l'inverse ne s'annule jamais.

Réponse. $-0{,}25$; $-0{,}5$; -2 ; 2 ; 0,5 ; 0,25 — deux nombres opposés ont des inverses opposés.

Correction de l'exercice 6 – Antécédents par la fonction carré

Chercher les antécédents de k revient à résoudre l'équation $x^2 = k$.

Antécédents de 25**.** On résout $x^2 = 25$. Comme $25 > 0$, il y a **deux** solutions opposées :

$$x = \sqrt{25} = 5 \qquad \text{ou} \qquad x = -\sqrt{25} = -5$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Antécédents de 0. On résout $x^2 = 0$. Un carré est nul uniquement si le nombre l'est : la **seule** solution est $x = 0$.

Antécédents de -4. On résout $x^2 = -4$. Or un carré est toujours **positif ou nul** : l'équation n'a **aucune** solution. Le nombre -4 n'a pas d'antécédent.

Antécédents de 7. Comme $7 > 0$, il y en a deux :

$$x = \sqrt{7} \approx 2{,}65 \qquad \text{ou} \qquad x = -\sqrt{7} \approx -2{,}65$$

Ici la valeur exacte s'écrit avec un radical ; on ne donne l'approximation que si l'énoncé le demande.

L'erreur classique. Répondre « $x = 5$ » seul pour $x^2 = 25$ en oubliant la solution négative. Le tableau de valeurs de l'exercice précédent le rappelle : un nombre strictement positif a toujours **deux** antécédents opposés.

Le réflexe de discussion. Devant $x^2 = k$, on regarde d'abord le **signe de** k : deux solutions si $k > 0$, une si $k = 0$, aucune si $k < 0$.

Réponse. 25 : 5 et -5 — 0 : seulement 0 — -4 : aucun antécédent — 7 : $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$.

Correction de l'exercice 7 – Antécédents par la fonction inverse

a) Chercher un antécédent de k revient à résoudre $\frac{1}{x} = k$.

Antécédent de 4 : $\frac{1}{x} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} = 0{,}25$. Contrôle : $\frac{1}{0{,}25} = 4$ ✓

Antécédent de $-0{,}5$: $\frac{1}{x} = -0{,}5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{-0{,}5} = -2$. Contrôle : $\frac{1}{-2} = -0{,}5$ ✓

Antécédent de $\frac{2}{3}$: $\frac{1}{x} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} = 1{,}5$. Contrôle : $\frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3}$ ✓

Chaque nombre non nul a donc **un et un seul** antécédent, à savoir son propre inverse.

b) Non. Résoudre $\frac{1}{x} = 0$ reviendrait à trouver x tel que $1 = 0 \times x = 0$, ce qui est impossible. Une fraction n'est nulle que si son **numérateur** est nul ; ici le numérateur vaut 1, donc

$$\frac{1}{x} \neq 0 \qquad \text{pour tout } x \neq 0$$

Le contraste avec la fonction carré. Un nombre positif a **deux** antécédents par la fonction carré, mais **un seul** par la fonction inverse. La différence vient de la symétrie : la parabole est coupée deux fois par une horizontale, l'hyperbole une seule.

À retenir. Tout nombre non nul a exactement un antécédent par g ; le seul nombre sans antécédent est 0. Graphiquement, cela signifie que l'hyperbole ne coupe jamais l'axe des abscisses.

Réponse. a) 0,25 ; -2 ; 1,5 — b) non : une fraction de numérateur 1 ne peut pas être nulle.

Correction de l'exercice 8 – Le carré est-il toujours plus grand ?

a) Pour $x = 3$:

$$3^2 = 9 \qquad \text{et} \qquad 9 > 3$$

L'affirmation semble vérifiée. Pour $x = 0{,}5$:

$$0{,}5^2 = 0{,}25 \qquad \text{et} \qquad 0{,}25 < 0{,}5$$

Cette fois, le carré est **plus petit** que le nombre.

b) L'affirmation est donc **fausse** : $x = 0{,}5$ en est un **contre-exemple**. Un seul suffit pour

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

réfuter une affirmation universelle.

c) On cherche les $x > 0$ tels que $x^2 < x$. En divisant les deux membres par x, qui est **strictement positif** (le sens de l'inégalité est donc conservé) :

$$x^2 < x \Leftrightarrow x < 1$$

L'inégalité $x^2 < x$ est donc vraie exactement pour

$$0 < x < 1$$

L'interprétation. Multiplier un nombre par lui-même le fait grandir si ce nombre dépasse 1, et le fait **rétrécir** s'il est compris entre 0 et 1. Ainsi $0{,}1^2 = 0{,}01$, dix fois plus petit.

Les cas limites. Pour $x = 1$, on a $1^2 = 1$: les deux sont égaux. Pour $x = 0$ également. Ce sont les deux seules valeurs où $x^2 = x$.

⚠ **La condition $x > 0$ compte.** Pour $x = -2$, on a $x^2 = 4 > -2$: tout nombre négatif a un carré plus grand que lui, puisque le carré est positif.

Réponse. a) $9 > 3$ mais $0{,}25 < 0{,}5$ — b) fausse, 0,5 est un contre-exemple — c) pour $0 < x < 1$.

Correction de l'exercice 9 – Le signe des images

Le nombre A. C'est un carré, donc

$$A = (-17{,}3)^2 \geq 0$$

et même $A > 0$ puisque $-17{,}3 \neq 0$. La propriété utilisée : le carré de tout réel est positif ou nul.

Le nombre B. C'est l'inverse d'un nombre **négatif**, donc $B < 0$. La propriété : $\frac{1}{x}$ est du même signe que x, car le numérateur 1 est positif et un quotient a le signe du produit de ses termes.

Le nombre C. C'est l'inverse d'un nombre **positif**, donc $C > 0$, pour la même raison.

Le nombre D. C'est encore un carré, donc $D > 0$. On peut même le calculer : $(-\sqrt{5})^2 = 5$.

Le contrôle par les valeurs. $A = 299{,}29$, $B = -250$, $C \approx 0{,}0787$ et $D = 5$: les quatre signes annoncés sont confirmés ✓

Ce que l'exercice entraîne. Connaître le **signe** d'une image avant de la calculer permet d'écarter une erreur de calculatrice ou de parenthésage. C'est particulièrement utile pour la fonction carré, où l'oubli des parenthèses produit un résultat négatif impossible.

La nuance entre $\geq$ et $>$. Un carré est positif **ou nul**, et il n'est nul que pour $x = 0$. Ici aucune des bases n'est nulle, donc les deux carrés sont strictement positifs.

Réponse. $A > 0$ et $D > 0$ (carrés de nombres non nuls) — $B < 0$ et $C > 0$ (l'inverse a le signe de x).

Correction de l'exercice 10 – Des points sur les courbes

Le point $M(a\,;b)$ appartient à la courbe de f si et seulement si $b = f(a)$.

a) **Le point $A(-3\,;9)$** : on calcule $(-3)^2 = 9$, et l'ordonnée annoncée est 9. Donc $A \in P$ ✓

Le point $B(4\,;-16)$: on calcule $4^2 = 16$, alors que l'ordonnée annoncée est -16. Donc $B \notin P$. On pouvait le voir sans calcul : une ordonnée **négative** est impossible sur la parabole.

Le point $C\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{4}\right)$: on calcule $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ✓ Donc $C \in P$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) **Le point** $D(5\,;0{,}2)$: on calcule $\frac{1}{5} = 0{,}2$ ✓ Donc $D \in H$.

Le point $E(-2\,;0{,}5)$: on calcule $\frac{1}{-2} = -0{,}5$, et non 0,5. Donc $E \notin H$. Là encore le signe suffisait : l'abscisse est négative, donc l'ordonnée d'un point de H le serait aussi.

La méthode générale. On **calcule l'image de l'abscisse** et on la compare à l'ordonnée donnée. Il ne faut jamais faire l'inverse (partir de l'ordonnée), car un même nombre peut avoir plusieurs antécédents.

Le raccourci du signe. Sur la parabole, l'ordonnée est toujours positive ou nulle. Sur l'hyperbole, elle est du signe de l'abscisse. Ces deux remarques éliminent beaucoup de points sans le moindre calcul.

Réponse. a) A et C appartiennent à P, pas B — b) D appartient à H, pas E.

Correction de l'exercice 11 – Valeurs interdites

Une expression fractionnaire n'est définie que si son **dénominateur est non nul**. On cherche donc, pour chacune, les valeurs qui l'annulent.

Pour f : $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. La valeur interdite est 3, d'où

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\} =]-\infty\,;3[\cup]3\,;+\infty[$$

Pour g : $2x + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x = -5 \Leftrightarrow x = -2{,}5$, d'où

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2{,}5\}$$

Pour h : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. La seule valeur interdite est 0, d'où $D_h = \mathbb{R}^*$.

Pour k : on cherche $x^2 + 1 = 0$, soit $x^2 = -1$. Or un carré n'est jamais négatif : cette équation n'a **aucune** solution. Le dénominateur ne s'annule donc jamais et

$$D_k = \mathbb{R}$$

La méthode. On ne cherche pas « où l'expression existe », mais **où le dénominateur s'annule** — puis on retire ces valeurs de $\mathbb{R}$. C'est plus rapide et cela ne laisse rien passer.

Le cas de k **à retenir.** Un dénominateur de la forme $x^2 + 1$ (ou $x^2 + 4$, etc.) est toujours **strictement positif**, donc jamais nul : la fonction est définie partout. C'est une conséquence directe de $x^2 \geq 0$.

Réponse. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2{,}5\}$, $D_h = \mathbb{R}^*$ et $D_k = \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 12 – Enchaîner les deux fonctions

a) On calcule **de l'intérieur vers l'extérieur**.

$$g(2) = \frac{1}{2} = 0{,}5 \quad \text{puis} \quad f(0{,}5) = 0{,}5^2 = 0{,}25$$

donc $f(g(2)) = 0{,}25$. De même :

$$f(-2) = (-2)^2 = 4 \quad \text{puis} \quad g(4) = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

donc $g(f(-2)) = 0{,}25$ également.

b) $g(0{,}1) = \frac{1}{0{,}1} = 10$, puis $f(10) = 10^2 = 100$. Donc $f(g(0{,}1)) = 100$.

c) On calcule les deux expressions séparément. D'une part :

$$f(g(x)) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1^2}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

D'autre part :

$$g(f(x)) = \frac{1}{x^2}$$

Les deux résultats sont **identiques**, ce qui démontre l'égalité pour tout $x \neq 0$.

Ce que dit ce résultat. Prendre l'inverse puis élever au carré, ou élever au carré puis prendre l'inverse, revient au même : les deux opérations **commutent**. C'est une propriété particulière à ces deux fonctions, qui n'a rien de général — avec $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto x^2$, l'ordre change tout.

La condition $x \neq 0$. Elle est indispensable dans les deux sens : à gauche parce que $g(0)$ n'existe pas, à droite parce que $f(0) = 0$ et que $g(0)$ n'existe pas non plus.

Le contrôle sur la question a). Avec $x = 2$: $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ ✓ et avec $x = -2$: $\frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ ✓

Réponse. a) 0,25 dans les deux cas — b) 100 — c) les deux valent $\frac{1}{x^2}$.

Correction de l'exercice 13 – Carrés et inverses de fractions

Le nombre A. On élève numérateur et dénominateur au carré :

$$A = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

Le nombre B. L'inverse d'une fraction s'obtient en échangeant numérateur et dénominateur :

$$B = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

Le nombre C. Le signe moins disparaît car l'exposant est pair :

$$C = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{(-5)^2}{2^2} = \frac{25}{4}$$

Le nombre D. On calcule d'abord le carré, puis l'inverse :

$$\left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{4}{49} \qquad \text{donc} \qquad D = \frac{1}{\frac{4}{49}} = \frac{49}{4}$$

La règle générale. Pour toute fraction non nulle :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

Le contrôle de vraisemblance. $\frac{2}{3} \approx 0{,}67$ est compris entre 0 et 1, donc son carré doit être **plus petit** : $\frac{4}{9} \approx 0{,}44$ ✓ Et $\frac{3}{4} < 1$, donc son inverse doit être **plus grand que** 1 : $\frac{4}{3} \approx 1{,}33$ ✓

Une remarque sur D. On aurait pu échanger l'ordre des opérations, puisque l'exercice précédent a montré que $\frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{x}\right)^2 : \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$ ✓ Même résultat.

Réponse. $A = \frac{4}{9}$, $B = \frac{4}{3}$, $C = \frac{25}{4}$ et $D = \frac{49}{4}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 14 – Comparer les deux fonctions en quelques points

On complète les deux lignes.

x	0,25	0,5	1	2	4
x^2	0,0625	0,25	1	4	16
$\frac{1}{x}$	4	2	1	0,5	0,25

a) On compare colonne par colonne.

— $x = 0{,}25$: $0{,}0625 < 4$ ✓
— $x = 0{,}5$: $0{,}25 < 2$ ✓
— $x = 1$: $1 = 1$, pas d’inégalité stricte
— $x = 2$: $4 > 0{,}5$ ✗
— $x = 4$: $16 > 0{,}25$ ✗

On a donc $x^2 < \frac{1}{x}$ pour $x = 0{,}25$ et $x = 0{,}5$, c’est-à-dire pour les valeurs **comprises entre** 0 **et** 1.

b) En $x = 1$, les deux fonctions prennent la **même valeur** :

$$1^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{1} = 1$$

Le point de coordonnées $(1\,;1)$ appartient donc aux **deux** courbes : la parabole et l’hyperbole se coupent en ce point.

La lecture d’ensemble. Sur les positifs, la fonction carré **croît** (de 0,0625 à 16) tandis que la fonction inverse **décroît** (de 4 à 0,25). Elles se croisent une seule fois, en $x = 1$: avant, l’inverse domine ; après, c’est le carré.

Un second point d’intersection ? Sur les négatifs, $x^2 > 0$ et $\frac{1}{x} < 0$: le carré est toujours au-dessus. Les deux courbes ne se rencontrent donc **qu’en un seul point**, $(1\,;1)$.

Réponse. a) pour $x = 0{,}25$ et $x = 0{,}5$, c’est-à-dire entre 0 et 1 — b) les deux valent 1 : les courbes se coupent en $(1\,;1)$.

Correction de l’exercice 15 – Deux situations concrètes

a) L’aire d’un carré est le produit de deux côtés égaux :

$$A(x) = x^2 \qquad \text{pour } x > 0$$

Pour $x = 7$: $A(7) = 49$ cm².

Pour une aire de 49 cm², on résout $x^2 = 49$, qui a pour solutions 7 et -7. Mais un côté est **strictement positif** : seule $x = 7$ cm convient.

Pour une aire de 50 cm² : $x^2 = 50$ donne $x = \sqrt{50} \approx 7{,}07$ cm (la solution négative est écartée pour la même raison).

b) L’aire d’un rectangle est le produit de la longueur par la largeur, donc $L \times x = 1$, d’où

$$L(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{pour } x > 0$$

C’est exactement la fonction inverse. Pour $x = 0{,}4$:

$$L(0{,}4) = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5 \text{ mètres}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Un rectangle de 0,4 m de large et 2,5 m de long a bien une aire de $0{,}4 \times 2{,}5 = 1$ m² ✓

L'interprétation de la fonction inverse. À aire constante, longueur et largeur varient en sens **contraire** : plus le rectangle est étroit, plus il doit être long. C'est la signature d'une **proportionnalité inverse**, que l'on retrouve partout — vitesse et durée à distance fixée, nombre de parts et taille des parts.

Le rôle du contexte sur le domaine. Mathématiquement, x^2 est définie sur $\mathbb{R}$ et $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$. Ici, une longueur impose $x > 0$: le contexte **restreint** toujours l'ensemble de définition, et c'est lui qui élimine la solution négative.

Le bilan de la plaquette. Calculer une image, c'est remplacer ; chercher un antécédent, c'est résoudre — deux solutions pour le carré d'un nombre positif, une seule pour l'inverse.

Réponse. a) $A(x) = x^2$, $A(7) = 49$ cm², côté 7 cm puis $\sqrt{50} \approx 7{,}07$ cm — b) $L(x) = \frac{1}{x}$ et $L(0{,}4) = 2{,}5$ m.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).