

Plaquette 4 - Équations et inéquations

Fonction carré et fonction inverse — Seconde

Corrections détaillées

Boîte à outils

Résoudre $x^2 = k$. On discute selon le signe de k :

$$x^2 = k \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{k} \text{ ou } x = -\sqrt{k} & \text{si } k > 0 \\ x = 0 & \text{si } k = 0 \\ \text{aucune solution} & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

Résoudre $\frac{1}{x} = k$. Après avoir écarté $x = 0$:

$$\frac{1}{x} = k \Leftrightarrow x = \frac{1}{k} \quad (k \neq 0), \quad \text{et aucune solution si } k = 0$$

Les deux outils de factorisation.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad \text{et le facteur commun : } x^2 - 5x = x(x - 5)$$

La règle du produit nul.

$$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Les inéquations avec un carré (pour $k > 0$) :

$$x^2 \leq k \Leftrightarrow -\sqrt{k} \leq x \leq \sqrt{k} \quad x^2 \geq k \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{k} \text{ ou } x \geq \sqrt{k}$$

Et toujours : $x^2 \geq 0$ est vraie pour **tout** réel, $x^2 < 0$ n'a **aucune** solution.

Les inéquations avec un inverse. On ne multiplie **jamais** par x sans connaître son signe : on **sépare les cas** $x > 0$ et $x < 0$.

⚠ **Valeurs interdites.** Avant de résoudre une équation avec dénominateur, on cherche les valeurs qui l'annulent : elles sont exclues de l'ensemble des solutions, même si le calcul semble les fournir.

Correction de l'exercice 1 - Quatre équations du type $x^2 = k$

On discute à chaque fois le **signe du second membre**.

Pour $x^2 = 16$, on a $16 > 0$, donc deux solutions opposées :

$$x = \sqrt{16} = 4 \quad \text{ou} \quad x = -4 \quad S = \{-4; 4\}$$

Pour $x^2 = 0,09$, on a $0,09 > 0$:

$$x = \sqrt{0,09} = 0,3 \quad \text{ou} \quad x = -0,3 \quad S = \{-0,3; 0,3\}$$

(On retient que $0,3^2 = 0,09$: le carré d'un nombre à un chiffre après la virgule en a deux.)

Pour $x^2 = 7$, on a $7 > 0$, mais 7 n'est pas un carré parfait : les solutions **exactes** s'écrivent avec un radical.

$$S = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\} \quad \text{avec } \sqrt{7} \approx 2,65$$

Pour $x^2 = -3$, le second membre est **négatif**. Or un carré est toujours positif ou nul : l'équation n'a aucune solution.

$$S = \emptyset$$

L'erreur la plus fréquente. Ne donner qu'une solution. L'équation $x^2 = 16$ a **deux** solutions opposées, pas une : $4^2 = 16$ mais $(-4)^2 = 16$ également.

La seconde erreur fréquente. Écrire $x = -\sqrt{-3}$ pour la dernière. Le symbole $\surd$ n'a de sens que pour un nombre positif : il n'y a rien à écrire, l'ensemble des solutions est **vide**.

La forme de la réponse. Pour $x^2 = 7$, on écrit $\sqrt{7}$, valeur exacte, et non 2,65, qui n'est qu'une approximation — sauf si l'énoncé demande explicitement un arrondi.

Réponse. $S = \{-4; 4\}$; $S = \{-0,3; 0,3\}$; $S = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$; $S = \emptyset$.

Correction de l'exercice 2 - Avec des fractions

Pour $x^2 = \frac{25}{9}$. Le second membre est positif, et c'est le carré de $\frac{5}{3}$ puisque $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$.
D'où

$$x = \frac{5}{3} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{5}{3} \quad S = \left\{-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right\}$$

Pour $x^2 = \frac{5}{4}$. Le numérateur 5 n'est pas un carré parfait, mais le dénominateur si :

$$x = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$S = \left\{-\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}}{2}\right\} \quad \text{avec} \quad \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,118$$

Pour $4x^2 = 9$. On isole d'abord x^2 en divisant les deux membres par 4 :

$$4x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{3}{2}$$

$$S = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$$

Contrôle : $4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4 \times \frac{9}{4} = 9 \checkmark$

La règle sur la racine d'un quotient. Pour des nombres positifs :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Elle permet de traiter séparément numérateur et dénominateur, et de simplifier dès que l'un des deux est un carré parfait.

Le réflexe pour la troisième. Toujours **isoler** x^2 avant d'appliquer la règle. Extraire la racine directement de $4x^2 = 9$ conduit à des erreurs de coefficient.

Réponse. $S = \left\{-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right\}$; $S = \left\{-\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$; $S = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$.

Correction de l'exercice 3 - Un carré décalé

Le raisonnement est le même que pour $x^2 = k$: si le carré d'une quantité vaut $k > 0$, cette quantité vaut $\sqrt{k}$ ou $-\sqrt{k}$.

a) $(x - 1)^2 = 9$ donne $x - 1 = 3$ ou $x - 1 = -3$, d'où

$$x = 4 \quad \text{ou} \quad x = -2 \quad S = \{-2; 4\}$$

Contrôle : $(4 - 1)^2 = 9 \checkmark$ et $(-2 - 1)^2 = (-3)^2 = 9 \checkmark$

b) $(x + 4)^2 = 2$ donne $x + 4 = \sqrt{2}$ ou $x + 4 = -\sqrt{2}$, d'où

$$x = -4 + \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = -4 - \sqrt{2}$$

$$S = \{-4 - \sqrt{2}; -4 + \sqrt{2}\} \quad \text{soit environ } -5,41 \text{ et } -2,59$$

c) $(2x - 3)^2 = 25$ donne $2x - 3 = 5$ ou $2x - 3 = -5$.

$$2x = 8 \Rightarrow x = 4 \quad \text{ou} \quad 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

$$S = \{-1; 4\}$$

Contrôle : $(2 \times 4 - 3)^2 = 5^2 = 25 \checkmark$ et $(2 \times (-1) - 3)^2 = (-5)^2 = 25 \checkmark$

L'erreur à éviter absolument. Écrire $(x - 1)^2 = 9 \Leftrightarrow x - 1 = 3$ en oubliant le cas négatif. On perd alors une solution sur deux.

Une autre voie possible. On peut aussi factoriser :

$$(x - 1)^2 - 9 = (x - 1)^2 - 3^2 = ((x - 1) - 3)((x - 1) + 3) = (x - 4)(x + 2)$$

puis appliquer la règle du produit nul. Les deux méthodes donnent évidemment le même résultat, et la seconde sera reprise à l'exercice suivant.

Les solutions ne sont plus opposées. Contrairement à $x^2 = k$, les solutions de $(x - 1)^2 = 9$ ne sont pas opposées : elles sont symétriques **par rapport à 1**. Ici -2 et 4 sont bien à distance 3 de 1.

Réponse. a) $S = \{-2; 4\}$ — b) $S = \{-4 - \sqrt{2}; -4 + \sqrt{2}\}$ — c) $S = \{-1; 4\}$.

Correction de l'exercice 4 - Résoudre par factorisation

On reconnaît à chaque fois une **différence de deux carrés**, que l'on factorise avec l'identité

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

a) Avec $a = x$ et $b = 7$:

$$x^2 - 49 = (x - 7)(x + 7)$$

La règle du produit nul donne $x - 7 = 0$ ou $x + 7 = 0$, d'où

$$S = \{-7; 7\}$$

b) Avec $a = x$ et $b = \sqrt{5}$, puisque $(\sqrt{5})^2 = 5$:

$$x^2 - 5 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$$

d'où $S = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$.

c) Avec $a = 3x$ (car $(3x)^2 = 9x^2$) et $b = 4$:

$$9x^2 - 16 = (3x - 4)(3x + 4)$$

On résout $3x - 4 = 0$, soit $x = \frac{4}{3}$, ou $3x + 4 = 0$, soit $x = -\frac{4}{3}$.

$$S = \left\{-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right\}$$

Contrôle : $9 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 9 \times \frac{16}{9} = 16 \checkmark$

Pourquoi factoriser plutôt qu'isoler. Sur ces trois équations, isoler x^2 aurait tout aussi bien marché. Mais la factorisation est la seule méthode disponible dès que l'équation contient un terme en x , comme dans l'exercice suivant : autant l'entraîner ici.

La difficulté de la question c). Reconnaître $9x^2$ comme le carré de $3x$, et non de $9x$. Le contrôle est immédiat : $(3x)^2 = 3^2 x^2 = 9x^2 \checkmark$

La règle du produit nul, en toutes lettres. Un produit de facteurs est nul **si et**

seulement si l'un au moins des facteurs est nul. C'est cette équivalence qui permet de passer d'une équation à deux équations plus simples.

Réponse. a) $S = \{-7; 7\}$ — b) $S = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$ — c) $S = \left\{-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right\}$.

Correction de l'exercice 5 - Une équation avec facteur commun

a) On ramène tout dans le même membre, puis on factorise par x :

$$x^2 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0$$

Par la règle du produit nul :

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$S = \{0; 3\}$$

Contrôle : $0^2 = 0 = 3 \times 0 \checkmark$ et $3^2 = 9 = 3 \times 3 \checkmark$

b) Anaïs a oublié la solution $x = 0$. En divisant par x , elle a **supposé implicitement** que $x \neq 0$ — or c'est précisément une des deux solutions.

On ne divise jamais les deux membres d'une équation par une quantité qui peut être **nulle**. C'est exactement la raison pour laquelle on factorise au lieu de diviser.

c) On factorise par x :

$$2x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x(2x + 7) = 0$$

d'où $x = 0$ ou $2x + 7 = 0$, c'est-à-dire $x = -\frac{7}{2} = -3,5$.

$$S = \{-3,5; 0\}$$

Contrôle : $2 \times (-3,5)^2 + 7 \times (-3,5) = 2 \times 12,25 - 24,5 = 24,5 - 24,5 = 0 \checkmark$

Le réflexe à installer. Toute équation où x^2 et x coexistent **sans terme constant** se factorise par x , et possède donc **toujours** 0 comme solution. Un coup d'œil suffit à le prévoir.

La différence avec les équations du premier degré. Là, diviser par un coefficient numérique non nul est parfaitement licite. Le danger n'apparaît qu'en divisant par une expression **contenant l'inconnue**.

Réponse. a) $S = \{0; 3\}$ — b) elle a divisé par x , ce qui suppose $x \neq 0$ et fait perdre la solution 0 — c) $S = \{-3,5; 0\}$.

Correction de l'exercice 6 - Équations avec la fonction inverse

Dans les quatre cas, la valeur $x = 0$ est **interdite** : on travaille sur $\mathbb{R}^*$.

a) $\frac{1}{x} = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5} = 0,2$, donc $S = \{0,2\}$.

Contrôle : $\frac{1}{0,2} = 5 \checkmark$

b) $\frac{1}{x} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2} = -1,5$, donc $S = \{-1,5\}$.

Contrôle : $\frac{1}{-1,5} = -\frac{2}{3} \checkmark$

c) $\frac{1}{x} = 0$ n'a **aucune** solution : une fraction est nulle si et seulement si son **numérateur** l'est, or celui-ci vaut 1.

$$S = \emptyset$$

d) On isole d'abord $\frac{1}{x}$, ou l'on multiplie par x (licite ici, car $x \neq 0$) :

$$\frac{3}{x} = 12 \Leftrightarrow 3 = 12x \Leftrightarrow x = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$S = \{0,25\}$$

Contrôle : $\frac{3}{0,25} = 12 \checkmark$

Le contraste avec la fonction carré. Chacune de ces équations a **au plus une** solution, jamais deux. C'est la traduction algébrique de ce que chaque horizontale ne coupe l'hyperbole qu'une fois.

La méthode générale pour $\frac{a}{x} = b$. On multiplie les deux membres par x — c'est licite puisque $x \neq 0$ — pour obtenir $a = bx$, puis $x = \frac{a}{b}$ si $b \neq 0$. C'est ce que fait la question d).

Le signe de la solution. Il est toujours celui du second membre, puisque $x = \frac{1}{k}$. En b), le second membre est négatif, donc la solution l'est aussi $\checkmark$

Réponse. a) $S = \{0,2\}$ — b) $S = \{-1,5\}$ — c) $S = \emptyset$ — d) $S = \{0,25\}$.

Correction de l'exercice 7 - Valeurs interdites et équation

a) Le dénominateur s'annule quand $x - 2 = 0$, soit $x = 2$. La valeur interdite est donc 2, et l'on résout sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

b) Pour $x \neq 2$:

$$\frac{1}{x-2} = 3 \Leftrightarrow x-2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

La solution $\frac{7}{3} \approx 2,33$ est **différente** de la valeur interdite : elle est acceptable.

$$S = \left\{ \frac{7}{3} \right\}$$

Contrôle : $\frac{7}{3} - 2 = \frac{7}{3} - \frac{6}{3} = \frac{1}{3}$, et $\frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \checkmark$

c) La valeur interdite est celle qui annule $x + 5$, soit $x = -5$. Pour $x \neq -5$:

$$\frac{1}{x+5} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x+5 = -2 \Leftrightarrow x = -7$$

La solution -7 est différente de -5 : elle convient.

$$S = \{-7\}$$

Contrôle : $-7 + 5 = -2$, et $\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \checkmark$

Pourquoi chercher la valeur interdite en premier. Il arrive que le calcul produise une valeur qui annule le dénominateur : elle doit alors être **rejetée**, et l'équation n'a pas de solution. Sans avoir identifié la valeur interdite au départ, on ne s'en aperçoit pas.

La technique de résolution. Prendre l'inverse des deux membres : si $\frac{1}{A} = k$ avec $k \neq 0$, alors $A = \frac{1}{k}$. C'est plus rapide que de multiplier en croix, et cela évite les erreurs de signe.

La rédaction attendue. On annonce la valeur interdite, on résout, on **conclut en vérifiant** que la solution trouvée n'est pas la valeur interdite. Les trois étapes sont attendues en évaluation.

Réponse. a) $x = 2$ — b) $S = \left\{ \frac{7}{3} \right\}$ — c) valeur interdite -5 , et $S = \{-7\}$.

Correction de l'exercice 8 - Inéquations avec un carré

a) Comme $25 > 0$, on utilise $x^2 \leq k \Leftrightarrow -\sqrt{k} \leq x \leq \sqrt{k}$:

$$x^2 \leq 25 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5 \quad S = [-5; 5]$$

L'ensemble des solutions est un **intervalle centré en 0**.

b) De même, $x^2 > 9$ donne une **réunion** de deux intervalles :

$$x^2 > 9 \Leftrightarrow x < -3 \text{ ou } x > 3 \quad S =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$$

c) Ici $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre entier, mais la méthode est identique :

$$x^2 \leq 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \quad S = [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$$

avec $\sqrt{3} \approx 1,73$.

Les points tests. Pour a), $x = 0 : 0 \leq 25 \checkmark$ et $0 \in [-5; 5] \checkmark$; $x = 6 : 36 > 25$, l'inégalité est fausse, et $6 \notin S \checkmark$

Pour b), $x = -4 : 16 > 9 \checkmark$ et $-4 \in S \checkmark$; $x = 0 : 0 < 9$, fausse, et $0 \notin S \checkmark$

La forme des solutions, à mémoriser. Une inéquation $x^2 \leq k$ donne **un** intervalle ; une inéquation $x^2 \geq k$ en donne **deux**. Une réponse d'une seule pièce à $x^2 > 9$ est nécessairement incomplète.

L'origine de ces formes. Elles se lisent sur la parabole : « sous l'horizontale » est une zone centrale, « au-dessus » est constituée des deux extrémités. Faire un croquis rapide évite de se tromper de forme.

Réponse. a) $S = [-5; 5]$ — b) $S =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$ — c) $S = [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

Correction de l'exercice 9 - Deux inéquations particulières

a) Un carré est **toujours** positif ou nul : l'inégalité est vraie pour tout réel.

$$S = \mathbb{R}$$

b) Un carré n'est jamais négatif : aucun réel ne peut vérifier $x^2 < -4$.

$$S = \emptyset$$

c) Un carré est strictement positif **sauf** s'il est nul, ce qui n'arrive que pour $x = 0$. Donc

$$S = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

d) Un carré est positif ou nul ; l'inégalité $x^2 \leq 0$ ne peut donc être vérifiée que dans le cas d'**égalité**, soit $x = 0$.

$$S = \{0\}$$

Le point commun aux quatre. Aucune ne se résout par la méthode générale : elles se traitent en invoquant directement la propriété $x^2 \geq 0$. Vouloir écrire $\sqrt{-4}$ à la question b) n'aurait aucun sens.

La nuance décisive entre a) et c). L'inégalité **large** $\geq$ inclut le cas $x^2 = 0$, donc $x = 0$ appartient aux solutions. L'inégalité **stricte** $>$ l'exclut. Un seul symbole change, et l'ensemble des solutions change avec lui.

Comment les reconnaître en devoir. Un second membre **négatif** ou **nul** annonce toujours l'un de ces quatre cas. Le réflexe est de regarder le signe du second membre avant d'entamer la moindre transformation.

La lecture graphique. La parabole est toujours au-dessus de l'axe des abscisses, qu'elle ne touche qu'en O . Les quatre réponses se lisent directement sur cette seule observation.

Réponse. a) $S = \mathbb{R}$ — b) $S = \emptyset$ — c) $S = \mathbb{R}^*$ — d) $S = \{0\}$.

Correction de l'exercice 10 - Signe de l'inverse

a) La fraction $\frac{1}{x}$ a un numérateur **positif** (1), donc son signe est celui de son dénominateur.

$$\frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0 \quad S =]0; +\infty[$$

$$\frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow x < 0 \quad S =]-\infty; 0[$$

b) **Oui**, les solutions sont les mêmes. L'inégalité large $\geq$ ajouterait le cas $\frac{1}{x} = 0$, mais celui-ci n'a **aucune** solution : l'inverse ne s'annule jamais.

$$S =]0; +\infty[\quad \text{dans les deux cas}$$

C'est une différence notable avec le carré, où le cas d'égalité apportait bien une solution.

c) Cette fois le numérateur est **négatif** : la fraction a le signe **contraire** de celui du dénominateur.

$$\frac{-2}{x} > 0 \Leftrightarrow x < 0 \quad S =]-\infty; 0[$$

Contrôle avec $x = -4$: $\frac{-2}{-4} = 0,5 > 0$ ✓ Avec $x = 4$: $\frac{-2}{4} = -0,5 < 0$, l'inégalité est bien fausse ✓

La règle des signes d'un quotient. Un quotient est positif si numérateur et dénominateur sont de **même signe**, négatif s'ils sont de signes contraires — exactement comme un produit.

L'exclusion permanente de 0. Dans toutes ces réponses, 0 est exclu, et les intervalles sont ouverts en 0. Écrire $[0; +\infty[$ serait une erreur : la fonction n'y est pas définie.

L'utilité de ces résultats. Ils servent de brique de base à toutes les inéquations avec quotient : on ramène l'expression à un signe de numérateur et un signe de dénominateur, puis on conclut.

Réponse. a) $S =]0; +\infty[$ puis $S =]-\infty; 0[$ — b) oui : l'inverse ne s'annule jamais — c) $S =]-\infty; 0[$.

Correction de l'exercice 11 - Une inéquation avec un inverse

a) Parce que le signe de x est **inconnu**. Multiplier une inégalité par un nombre positif conserve son sens, mais multiplier par un nombre négatif **l'inverse**. Sans connaître le signe de x , on ne sait pas quel sens donner au résultat.

b) **Premier cas** : $x > 0$. On peut multiplier par x en conservant le sens :

$$\frac{1}{x} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 2x \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

Avec la condition $x > 0$, cela donne $x \geq 0,5$.

Second cas : $x < 0$. Alors $\frac{1}{x} < 0$, et comme $0 < 2$, l'inégalité $\frac{1}{x} \leq 2$ est **automatiquement vraie**. Tous les $x < 0$ conviennent.

En réunissant les deux cas :

$$S =]-\infty; 0[\cup \left[\frac{1}{2}; +\infty[$$

c) **Pour** $x = -1$: $\frac{1}{-1} = -1 \leq 2$ ✓ et $-1 \in S$ ✓

Pour $x = 0,25$: $\frac{1}{0,25} = 4$, et $4 \leq 2$ est **faux** ✓ cohérent, car $0,25 \notin S$.

Pour $x = 3$: $\frac{1}{3} \approx 0,33 \leq 2$ ✓ et $3 \in S$ ✓

L'erreur classique. Écrire directement « $\frac{1}{x} \leq 2 \Leftrightarrow x \geq 0,5$ », ce qui oublie **tous** les nombres négatifs — c'est-à-dire la moitié des solutions.

La lecture graphique du résultat. Sur l'hyperbole, on cherche où la courbe est **sous** l'horizontale $y = 2$. C'est le cas sur toute la branche de gauche (entièrement négative) et, sur la branche de droite, à partir de $x = 0,5$.

La méthode générale. Toute inéquation où l'inconnue figure au dénominateur se traite en **séparant les cas selon le signe du dénominateur**, puis en réunissant les solutions. La réponse est presque toujours une réunion d'intervalles.

Réponse. a) le signe de x est inconnu, or multiplier par un négatif inverse l'inégalité —
b) $S =]-\infty ; 0[\cup \left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ — c) vérifications concordantes.

Correction de l'exercice 12 - Résoudre à partir d'un graphique

a) Les deux courbes se coupent en $A(-3 ; 9)$ et $B(2 ; 4)$. Les solutions de l'équation sont les **abscisses** de ces points :

$$S = \{-3 ; 2\}$$

b) On développe le produit proposé :

$$(x - 2)(x + 3) = x^2 + 3x - 2x - 6 = x^2 + x - 6$$

L'égalité est vérifiée ✓ On peut alors résoudre par la règle du produit nul :

$$x^2 = 6 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 3) = 0$$

d'où $x = 2$ ou $x = -3$, ce qui **confirme** la lecture graphique.

c) L'inéquation $x^2 \geq 6 - x$ demande où la parabole est **au-dessus** de la droite. Sur le graphique, c'est à l'**extérieur** du segment $[-3 ; 2]$:

$$S =]-\infty ; -3] \cup [2 ; +\infty[$$

Les crochets sont **fermés** en -3 et en 2 , puisque l'inégalité est large et que ces deux valeurs donnent l'égalité.

Contrôle par des points tests. $x = 3 : 9 \geq 3$ ✓ ; $x = 0 : 0 \geq 6$ est faux ✓ ; $x = -4 : 16 \geq 10$ ✓

La complémentarité des deux approches. Le graphique donne le **nombre** de solutions et la **forme** de l'ensemble des solutions ; le calcul donne les **valeurs exactes**. On utilise le premier pour orienter, le second pour conclure.

Pourquoi l'énoncé fournit la factorisation. En Seconde, on ne dispose pas du discriminant : une équation du second degré avec un terme en x ne se résout que si la factorisation est **donnée**, ou si elle saute aux yeux (facteur commun, différence de carrés).

Réponse. a) $S = \{-3 ; 2\}$ — b) le développement donne bien $x^2 + x - 6$, et le produit nul redonne -3 et 2 — c) $S =]-\infty ; -3] \cup [2 ; +\infty[$.

Correction de l'exercice 13 - Comparer deux expressions

a) On factorise par x :

$$A - B = x^2 - 4x = x(x - 4)$$

b) Les deux facteurs s'annulent respectivement en 0 et en 4 . On dresse le tableau de signes :

Intervalle	$] -\infty ; 0[$	$] 0 ; 4[$	$] 4 ; +\infty[$
Signe de x	–	+	+
Signe de $x - 4$	–	–	+
Signe de $x(x - 4)$	+	–	+

Le produit s'annule en $x = 0$ et en $x = 4$.

Entre 0 et 4, le produit est **négatif** (un facteur positif et un facteur négatif) ; à l'extérieur, il est **positif** (les deux facteurs de même signe).

c) On en déduit la comparaison :

- si $x < 0$ ou $x > 4$: $A - B > 0$, donc $x^2 > 4x$;
- si $0 < x < 4$: $A - B < 0$, donc $x^2 < 4x$;
- si $x = 0$ ou $x = 4$: $A = B$.

Contrôle sur trois valeurs. $x = -1$: $1 > -4$ ✓ ; $x = 2$: $4 < 8$ ✓ ; $x = 5$: $25 > 20$ ✓

La méthode universelle de comparaison. Pour comparer deux expressions A et B , on étudie le **signe de leur différence** $A - B$. C'est plus sûr que de manipuler l'inégalité directement, surtout quand elle contient l'inconnue des deux côtés.

Pourquoi factoriser avant. Le signe d'une **somme** ne se lit pas ; le signe d'un **produit** se lit facteur par facteur. La factorisation est donc l'étape indispensable avant tout tableau de signes.

Le lien avec la lecture graphique. Les valeurs 0 et 4 sont les abscisses des points d'intersection de la parabole et de la droite $y = 4x$. Entre elles, la droite est au-dessus ; à l'extérieur, c'est la parabole.

Réponse. a) $A - B = x(x - 4)$ — b) positif sur $] -\infty ; 0[$ et $] 4 ; +\infty[$, négatif sur $] 0 ; 4[$ — c) $x^2 > 4x$ à l'extérieur de $[0 ; 4]$, $x^2 < 4x$ entre 0 et 4, égalité en 0 et 4.

Correction de l'exercice 14 - Une équation à rejeter

a) Le premier dénominateur s'annule pour $x = 3$. Le second se factorise :

$$2x - 6 = 2(x - 3)$$

et s'annule également pour $x = 3$. La seule valeur interdite est donc 3, et l'on travaille sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

b) Pour $x \neq 3$, deux fractions de même numérateur 1 sont égales si et seulement si leurs **dénominateurs** sont égaux :

$$x - 3 = 2x - 6 \Leftrightarrow -3 + 6 = 2x - x \Leftrightarrow x = 3$$

c) Le calcul fournit $x = 3$, qui est précisément la **valeur interdite**. Cette valeur doit donc être **rejetée**, et l'équation n'a aucune solution :

$$S = \emptyset$$

La vérification par une autre voie. Pour $x \neq 3$, on peut écrire

$$\frac{1}{2x - 6} = \frac{1}{2(x - 3)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x - 3}$$

L'équation revient donc à $\frac{1}{x - 3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x - 3}$, soit, en posant $u = \frac{1}{x - 3}$, l'équation $u = \frac{u}{2}$, c'est-à-dire $u = 0$. Or u ne peut pas être nul : aucune solution ✓

La leçon de cet exercice. La recherche des valeurs interdites n'est pas une formalité : ici, elle est **la seule** chose qui empêche de répondre faussement « $x = 3$ ».

La rédaction attendue. On écrit explicitement « la valeur 3 est interdite, elle doit être

rejetée », puis on conclut à $S = \emptyset$. Omettre cette phrase fait perdre l'essentiel des points.

À retenir. Une équation avec dénominateur peut parfaitement n'avoir **aucune** solution, même quand le calcul en produit une. Toute valeur obtenue doit être confrontée aux valeurs interdites.

Réponse. a) la valeur interdite est 3 — b) le calcul donne $x = 3$ — c) cette valeur est interdite, donc $S = \emptyset$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : équations et inéquations mêlées

a) **Méthode : isoler x^2 , ou factoriser.**

$$3x^2 - 27 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 27 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3$$

$$S = \{-3; 3\}$$

b) **Méthode : tout ramener d'un côté, puis factoriser.**

$$x^2 \leq 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x \leq 0 \Leftrightarrow x(x - 2) \leq 0$$

Le produit $x(x - 2)$ est négatif ou nul entre ses deux racines 0 et 2 (un facteur positif, un facteur négatif), donc

$$S = [0; 2]$$

Contrôle : $x = 1$ donne $1 \leq 2$ ✓ ; $x = 3$ donne $9 \leq 6$, faux ✓ ; $x = -1$ donne $1 \leq -2$, faux ✓

c) **Méthode : séparer les cas selon le signe de x .**

Si $x < 0$: $\frac{1}{x} < 0 < 1$, l'inégalité est **fausse**. Aucune solution de ce côté.

Si $x > 0$: on multiplie par x sans changer le sens :

$$\frac{1}{x} \geq 1 \Leftrightarrow 1 \geq x \Leftrightarrow x \leq 1$$

Avec la condition $x > 0$, cela donne $0 < x \leq 1$, soit

$$S =]0; 1]$$

Contrôle : $x = 0,5$ donne $2 \geq 1$ ✓ ; $x = 2$ donne $0,5 \geq 1$, faux ✓

d) **Méthode : le carré d'une quantité vaut 16.**

$$(x + 2)^2 = 16 \Leftrightarrow x + 2 = 4 \text{ ou } x + 2 = -4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -6$$

$$S = \{-6; 2\}$$

Contrôle : $(2 + 2)^2 = 16$ ✓ et $(-6 + 2)^2 = (-4)^2 = 16$ ✓

Le bilan des méthodes. Isoler x^2 quand il n'y a pas de terme en x ; **factoriser** dès qu'il y en a un ; **séparer les cas de signe** dès que l'inconnue est au dénominateur ; et pour un carré décalé, penser aux **deux** valeurs opposées.

Le contrôle final, toujours. Chacune des quatre réponses se vérifie en quelques secondes en testant une valeur. C'est le seul moyen fiable de détecter un signe oublié ou une solution perdue.

Réponse. a) $S = \{-3; 3\}$ — b) $S = [0; 2]$ — c) $S =]0; 1]$ — d) $S = \{-6; 2\}$.